



## ARTÍCULO ORIGINAL

# Método de rigidez directa aplicado a pórticos con sección variable

Direct rigidity method applied to frames with variable section

• Marcos Rupay <sup>1</sup> • Regner Parra <sup>2</sup> • Thalia Ortiz <sup>3</sup> • Jordy De la O <sup>4</sup> • Juan Francisco <sup>5</sup>

<sup>1</sup> Universidad Nacional Intercultural de la Selva Central Juan Santos Atahualpa, Chanchamayo, Perú.

Correo electrónico: [mrupay@uniscjsa.edu.pe](mailto:mrupay@uniscjsa.edu.pe)

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7891-1838>

<sup>2</sup> Universidad Nacional Intercultural de la Selva Central Juan Santos Atahualpa, Chanchamayo, Perú.

Correo electrónico: [Rparra@uniscjsa.edu.pe](mailto:Rparra@uniscjsa.edu.pe)

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3564-4637>

<sup>3</sup> Universidad Nacional Intercultural de la Selva Central Juan Santos Atahualpa, Chanchamayo, Perú.

Correo electrónico: [77491698@uniscjsa.edu.pe](mailto:77491698@uniscjsa.edu.pe)

ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-0783-6421>

<sup>4</sup> Universidad Nacional Intercultural de la Selva Central Juan Santos Atahualpa, Chanchamayo, Perú.

Correo electrónico: [74414664@uniscjsa.edu.pe](mailto:74414664@uniscjsa.edu.pe)

ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-0646-9112>

<sup>5</sup> Universidad Nacional Intercultural de la Selva Central Juan Santos Atahualpa, Chanchamayo, Perú.

Correo electrónico: [72203159@uniscjsa.edu.pe](mailto:72203159@uniscjsa.edu.pe)

ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-9446-1424>

**Recibido:** 20 junio del 2024 / **Revisado:** 10 de julio del 2024 / **Aprobado:** 28 de julio del 2024 / **Publicado:** 29 de agosto del 2024

## RESUMEN

El propósito de este artículo de investigación tiene como objetivo “Demostrar la efectividad del método de rigidez directa aplicado en secciones variables”, usando como material de ayuda para la verificación al análisis de la sección variable el software SAP2000, el ámbito de nuestro producto es descriptivo y comparativo ya que demuestra el método de rigidez directa en secciones variables siendo analizadas y comprobadas por un software. La metodología empleada es descriptiva; el desarrollo interno se plasmó un pórtico con sección variable desarrollado manualmente derivando a ello a un sistema Q-D, dados los parámetros del método dado por el por el método de rigidez directa, debido a que se debe conocer la precisión de los cálculos analíticos que incluyen: el sistema principal, los factores de transporte y luego la matriz del sistema, dando como resultado los vectores de carga, fuerzas internas, su flexión, diagramas de momento y los diagramas de fuerza cortante. La discusión respecta; dado que a menudo se examina los resultados en los diagramas de fuerza cortante y momento flector generalmente se determinan en decimales cuando se analiza mediante el análisis por el método directo de rigidez manual, es necesario verificar la exactitud de estas soluciones para poder realizar cálculos más precisos.

**Palabras clave:** Vector de deformación, sección variable, factores de transporte, método de rigidez directa.

## ABSTRACT

The purpose of this research article is to “Demonstrate the effectiveness of the direct stiffness method applied in variable sections”, using the SAP2000 software as aid material for the verification of the analysis of the variable section. The scope of our product is descriptive. and comparative since it demonstrates the direct stiffness method in variable sections being analyzed and verified by software. The methodology used is descriptive; The internal development was a frame with a variable section developed manually, resulting in a Q-D system, given the parameters of the method given by the direct rigidity method, because the precision of the analytical calculations must be known, which include: the main system, the transport factors and then the system matrix, resulting in the load vectors, internal forces, their bending, moment diagrams and the shear force diagrams. The discussion concerns; Since results in shear force and bending moment diagrams are often determined in decimals when analyzed by direct manual stiffness method analysis, it is necessary to verify the accuracy of these solutions in order to perform more precise calculations.

**Keywords:** Strain vector, variable section, transport factors and direct stiffness method.

## 1. INTRODUCCIÓN

En este reciente manuscrito se acrecentará el método de rigidez directo que es consecuente preciso y eficiente para determinar una estructura de barras bajo un modelo matemático nombrado matriz de rigidez. A medida que cambia la sección variable, también cambia la rigidez, lo que dificulta el análisis tradicional en pórticos con sección variable generando ecuaciones diferenciales parcialmente muy complejas (Carrillo, 2018).

Resolver este problema es de gran importancia en ingeniería civil, donde el caso de vigas con secciones transversales variables es común en muchas aplicaciones, como puentes en arco, elementos estructurales compuestos y estructuras con formas complejas. Es importante comprender y calcular la rigidez de estas vigas ya que es fundamental para garantizar la seguridad, estabilidad y eficiencia de la estructura.

En el marco teórico el método de rigidez directo según (Carrillo, 2018), consiste en delimitar a la estructura, estos que se relacionan los desplazamientos nodales con fuerzas exteriores el cual los componentes de esta matriz relacionan las fuerzas nodales equivalentes y desplazamiento sobre los nodos; utilizado en este trabajo se basa en la teoría de vigas y pórticos con sección variable y el método de elementos finitos, proporciona un potente marco para el análisis estructural y el modelado. (Lizarza, 2011) el método de los elementos finitos permite la discretización de elementos más pequeños, que a su vez permiten considerar cambios transversales en toda su longitud. Lo fundamental hipotético y estipulación anterior de este argumento se fundamentan en la explicación entre la rigidez y su suficiencia para tolerar la deformidad bajo cargas externas.

También destacan la relevancia de la matriz de rigidez al mencionar que "En el análisis de estructuras mediante el método de los elementos finitos, la precisión de la matriz de rigidez determina la exactitud de las predicciones de desplazamientos y fuerzas internas" (O.C.

Zienkiewicz, 2005). Esta precisión es crucial para asegurar que el diseño de una estructura sea seguro y eficiente. En el desarrollo la sección variable cualquier elemento de sección variable debe definir la variación de las propiedades geométricas de su sección a lo largo del eje longitudinal de su centro de masas, y este eje debe ser continuo. Se ha demostrado que las vigas arqueadas pueden desarrollar ejes centroides discontinuos, lo que resulta en el acoplamiento de fuerzas axiales, de flexión y de corte, los elementos de sección variable pueden dar mejores resultados en vigas y en columnas (COLUNGA, 2021). este elemento se encuentra sujeto una rotación unitaria mientras que el otro extremo opuesto esta empotrado, el momento es capaz de generar una rotación unitaria correspondiente a la rigidez al giro en aquel extremo, mientras el momento que hay en el empotrado es proporcional al momento existente en el extremo que, rota, en una cantidad denominada factor de transporte. (PUCP).

Esta metodología se originó a finales del siglo XX como una técnica efectiva y precisa de analizar datos estructurales complejo como una medida eficaz y precisa. Por otra parte, se ha tenido como antecedentes Dado que existen registros previos, como En el diseño de rascacielos, la Torre Willis en Chicago, el método de rigidez se utilizó para analizar la estructura del edificio bajo cargas de viento y sísmicas. Este enfoque permitió optimizar el uso de materiales y asegurar la estabilidad del edificio ( Kumar Ghosh & Anthony Fanella, 2003).

En síntesis, la aclaración expuesta en este trabajo se escudra en el análisis mediante el método de rigidez con sección variable y su constatación con el programa SAP2000, para mejorar la comprensión, evaluación y precisión de las secciones variables. como objetivo Demostrar la efectividad el método de rigidez directa aplicado en secciones variables.

## 2. MATERIALES Y MÉTODOS

### 2.1. Método directo de la rigidez

Según (Rupay Vargas, 2024), el método de rigidez directa tiene como objetivo proporcionar un conjunto de ecuaciones que permitan comprender las cargas nodales para un sistema Q-D determinado. Estas cargas nodales pueden entonces expresarse como combinaciones lineales de los desplazamientos, y su valor exacto depende en parte de los grados de libertad alcanzados. Además, dice que los

desplazamientos nodales y las deformaciones del extremo de la barra que resultan en el nudo garantizan la compatibilidad con este enfoque. La Superposición de Desplazamientos, en la que las incógnitas representan los grados de libertad, es la base de esta metodología. También es necesario considerar el equilibrio dentro del nodo evaluado.

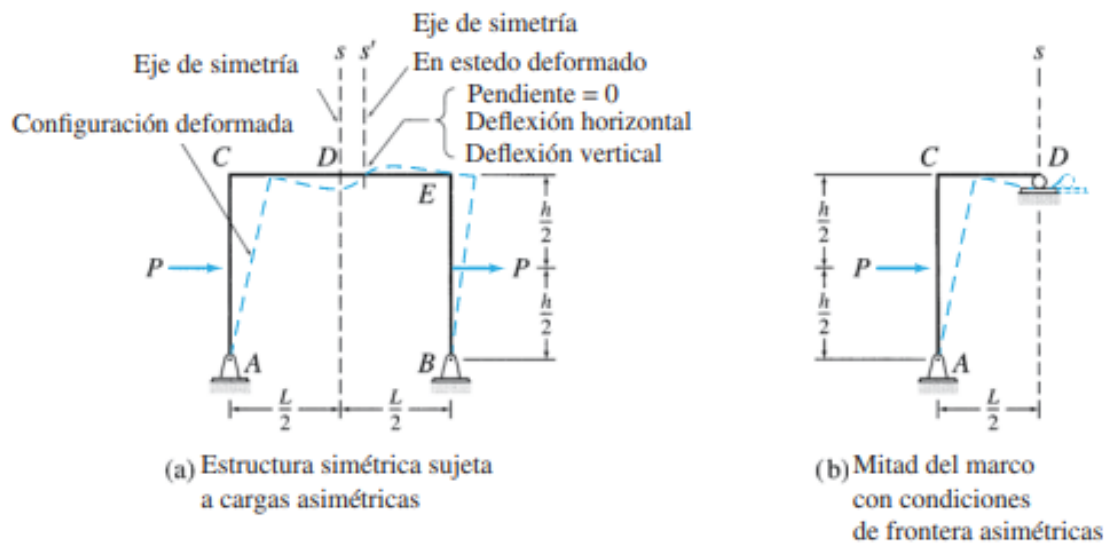
## 2.2. Estructuras simétricas con cargas antisimétricas

Según (Kassimali, 2014), Cuando una estructura simétrica está sujeta a una carga que es asimétrica con respecto al eje de simetría de la estructura, la respuesta de la estructura también es asimétrica, con los puntos de la estructura en el eje de simetría sin desviaciones en la dirección del eje de simetría, por lo tanto, para determinar la respuesta de la estructura completa,

necesitamos analizar solo la mitad de la estructura, de un lado del eje de simetría con las condiciones asimétricas de frontera (es decir, las deflexiones en la dirección del eje de simetría deben ser cero) en el eje. La respuesta de la mitad restante está dada por el negativo de la deflexión de la respuesta de la mitad de la estructura analizada.

**Figura 1**

*Estructura Simétrica sujeta a cargas antisimétricas*



**Nota:** Análisis Estructural 5° según Kassimali, 2014

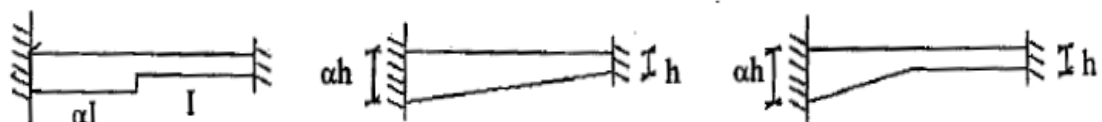
## 2.3. Barras de sección variable

En el libro de (Ottazzi Pasino, 2014), aclara que el cálculo de los coeficientes de rigidez de barras de sección variable es un tanto

más tedioso desde el punto de vista numérico.

**Figura 2**

*Barras de sección variable*



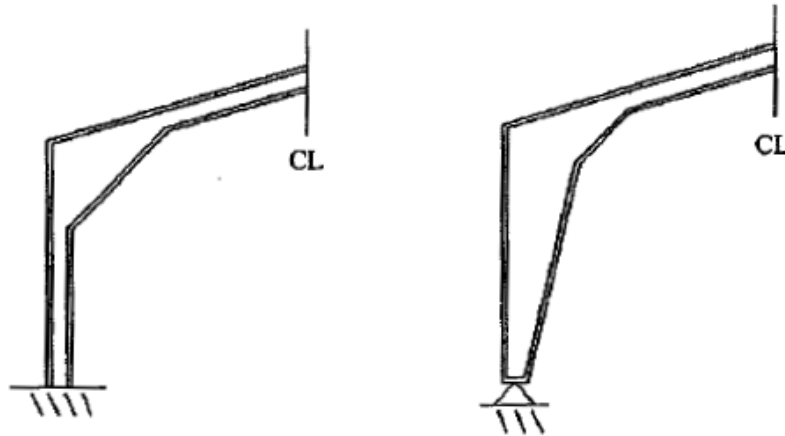
**Nota:** Análisis estructural de Ottazzi Pasino, 2014

Según (Ottazzi Pasino, 2014), en algunos casos es posible “ampliar el sistema de coordenadas para lograr un ensamblaje de barras de sección constante, pero esto conllevaría a tener un mayor número de

GDL y no siempre es posible o conveniente ampliar el sistema de coordenadas para los elementos de sección variable, tales casos como:

**Figura 3**

*Pórticos metálicos de alma llena con barras de sección variable*



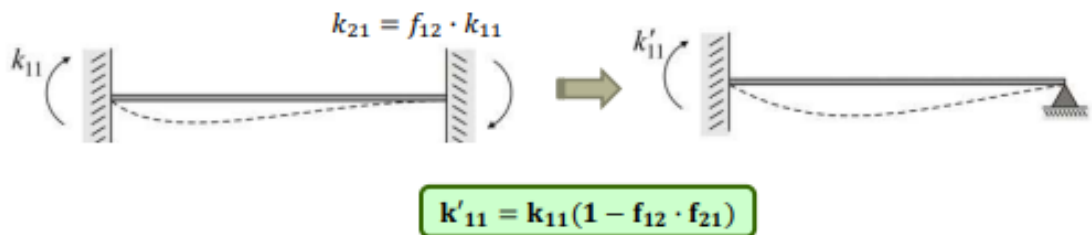
**Nota:** Analisis estructural de Ottazzi Pasino, 2014

## 2.4. Factores de transporte

Los factores de transporte son formulas aplicables para pasar de un sistema de deformación a otro, se tienen los siguientes casos:

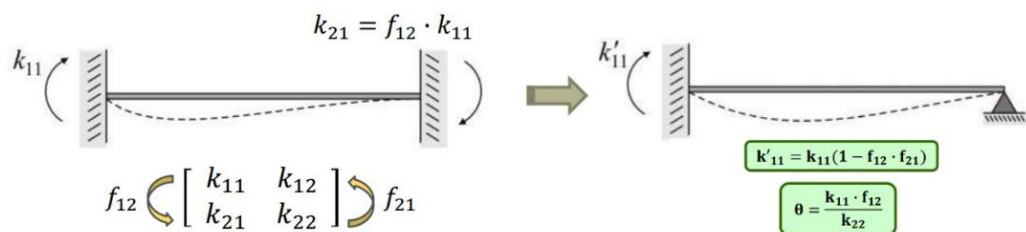
**Figura 4**

*Factor de transporte caso 1*



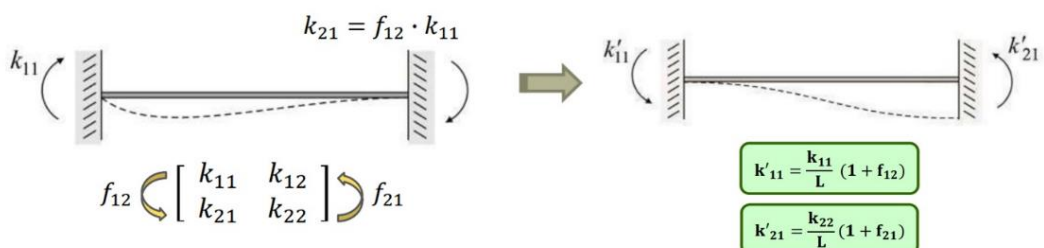
**Figura 5**

*Factor de transporte caso 2*

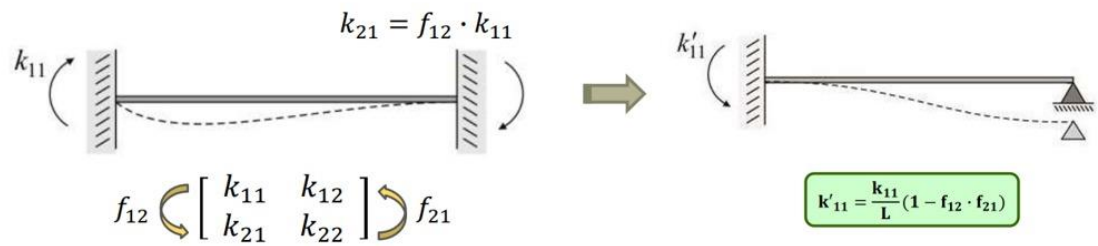


**Figura 6**

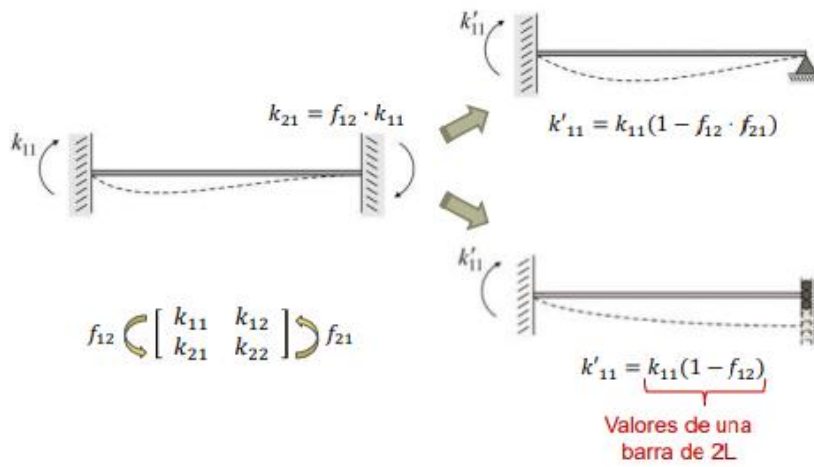
*Factor de transporte caso 3*



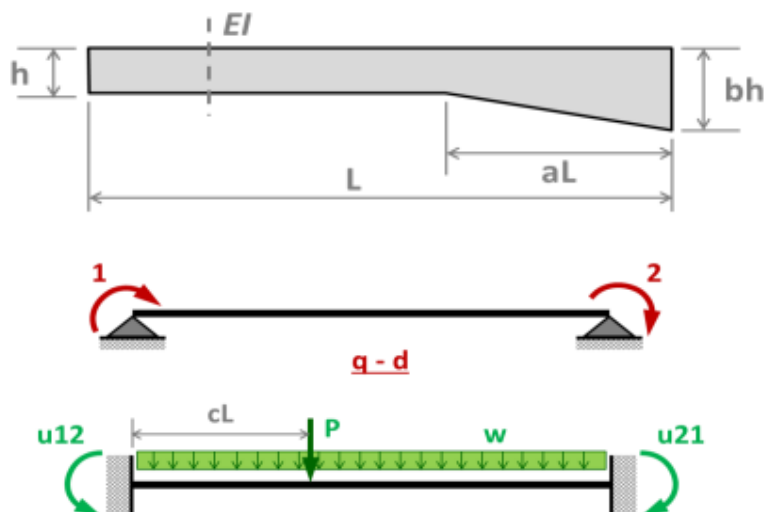
**Figura 7**  
Factor de transporte caso 4



**Figura 8**  
MEP - Factor de transporte



**Figura 9**  
Rigidez de barra – un tramo con sección variable



**Tabla 1**  
Coeficiente de rigidez aplicado al pórtico planteado

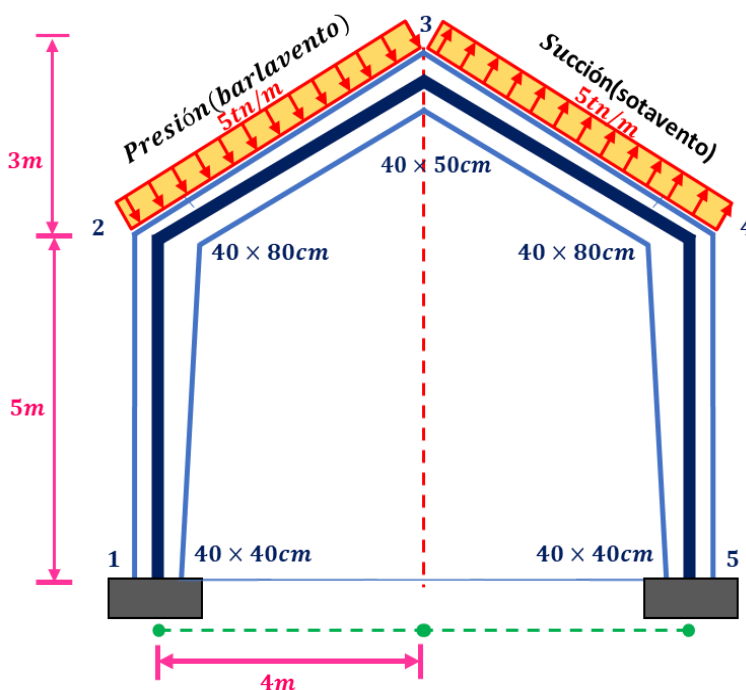
FACTORES DE DIMENSIÓN		MATRIZ DE RIGIDEZ				MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO											
		FACTORES DE RIGIDEZ		FACTOR DE TRANSPORTE		CARGA DISTRIBUIDA		CARGA CONCENTRADA									
		k11 (l/EI)	k22 (l/EI)	f12	f21	u12 (l/wL <sup>3</sup> )	u21 (l/wL <sup>3</sup> )	c = 0.1		c = 0.3		c = 0.5		c = 0.7		c = 0.9	
a	b							u12 (l/PL)	u21 (l/PL)	u12 (l/PL)	u21 (l/PL)	u12 (l/PL)	u21 (l/PL)	u12 (l/PL)	u21 (l/PL)	u12 (l/PL)	u21 (l/PL)
0.1	1.40	4.14	4.64	0.556	0.496	0.0780	0.0946	0.0804	0.0104	0.1426	0.7240	0.1164	0.1432	0.0534	0.1672	0.0052	0.0888
	1.60	4.19	4.85	0.573	0.495	0.0763	0.0981	0.0802	0.0108	0.1412	0.0754	0.1137	0.1490	0.0505	0.1735	0.0042	0.0911
	2.00	4.25	5.14	0.596	0.493	0.0741	0.1029	0.0799	0.0114	0.1393	0.0795	0.1100	0.1569	0.0465	0.1821	0.0028	0.0940
	2.50	4.30	5.36	0.613	0.492	0.0724	0.1066	0.0797	0.0118	0.1378	0.0826	0.1072	0.1629	0.0434	0.1887	0.0018	0.0960
	3.00	4.33	5.50	0.624	0.491	0.0714	0.1088	0.0795	0.0121	0.1369	0.0846	0.1055	0.1667	0.0416	0.1928	0.0013	0.0972
	∞	4.44	6.09	0.667	0.486	0.0675	0.1175	0.0790	0.0133	0.1333	0.0926	0.0988	0.1818	0.0346	0.2084	0.0000	0.1000
0.3	1.40	4.34	5.98	0.648	0.470	0.0730	0.1069	0.0795	0.0126	0.1368	0.0870	0.1064	0.1684	0.0453	0.1863	0.0052	0.0886
	1.60	4.48	6.84	0.704	0.461	0.0690	0.1162	0.0789	0.0141	0.1327	0.0970	0.0990	0.1862	0.0387	0.2017	0.0040	0.0910
	2.00	4.71	8.29	0.791	0.449	0.0630	0.1311	0.0779	0.0166	0.1262	0.1134	0.0874	0.2150	0.0289	0.2252	0.0026	0.0941
	2.50	4.91	9.68	0.866	0.439	0.0577	0.1442	0.0770	0.0189	0.1203	0.1286	0.0771	0.2412	0.0208	0.2452	0.0016	0.0963
	3.00	5.06	10.72	0.918	0.433	0.0542	0.1534	0.0763	0.0206	0.1161	0.1397	0.0700	0.2599	0.0150	0.2586	0.0010	0.0976
	∞	5.71	16.21	1.143	0.403	0.0408	0.1908	0.0735	0.0289	0.0980	0.1915	0.0408	0.3426	0.0000	0.3000	0.0000	0.1000
0.5	1.40	4.43	7.12	0.697	0.434	0.0718	0.1079	0.0791	0.0137	0.1346	0.0930	0.1032	0.1733	0.0448	0.1812	0.0055	0.0889
	1.60	4.62	8.81	0.788	0.413	0.0672	0.1190	0.0783	0.0161	0.1291	0.1079	0.0941	0.1958	0.0384	0.1950	0.0044	0.0889
	2.00	4.99	12.28	0.948	0.385	0.0596	0.1390	0.0767	0.0208	0.1192	0.1364	0.0788	0.2371	0.0288	0.2175	0.0030	0.0919
	2.50	5.39	16.52	1.114	0.363	0.0524	0.1599	0.0750	0.0263	0.1087	0.1688	0.0636	0.2812	0.0207	0.2382	0.0020	0.0943
	3.00	5.73	20.43	1.245	0.349	0.0468	0.1769	0.0735	0.0311	0.1001	0.1969	0.0519	0.3174	0.0153	0.2530	0.0014	0.0958
	∞	8.00	56.00	2.000	0.286	0.0208	0.2708	0.0640	0.0680	0.0480	0.3960	0.0000	0.5000	0.0000	0.3000	0.0000	0.1000
0.7	1.40	4.51	7.88	0.698	0.399	0.0699	0.1048	0.0787	0.0139	0.1314	0.0920	0.0986	0.1663	0.0436	0.1746	0.0055	0.0857
	1.60	4.74	10.28	0.797	0.368	0.0650	0.1145	0.0777	0.0166	0.1250	0.1068	0.0889	0.1848	0.0373	0.1855	0.0045	0.0874
	2.00	5.17	15.89	0.995	0.323	0.0573	0.1323	0.0759	0.0222	0.1138	0.1367	0.0736	0.2184	0.0285	0.2031	0.0032	0.0898
	2.50	5.66	24.25	1.234	0.288	0.0502	0.1523	0.0738	0.0297	0.1020	0.1740	0.0597	0.2547	0.0214	0.2200	0.0023	0.0919
	3.00	6.13	33.77	1.460	0.265	0.0447	0.1703	0.0719	0.0377	0.0919	0.2107	0.0494	0.2858	0.0168	0.2329	0.0017	0.0934
	∞	13.33	324.44	4.000	0.164	0.0075	0.3575	0.0444	0.2037	0.0000	0.7000	0.0000	0.5000	0.0000	0.3000	0.0000	0.1000
1.0	1.40	5.17	8.57	0.642	0.388	0.0675	0.1011	0.0765	0.0141	0.1244	0.0884	0.0954	0.1591	0.0437	0.1686	0.0057	0.0847
	1.60	5.74	11.63	0.709	0.350	0.0618	0.1086	0.0744	0.0168	0.1153	0.1002	0.0849	0.1718	0.0375	0.1766	0.0047	0.0859
	2.00	6.86	19.45	0.834	0.294	0.0529	0.1216	0.0706	0.0224	0.1005	0.1221	0.0691	0.1951	0.0289	0.1893	0.0035	0.0878
	2.50	8.23	32.68	0.981	0.247	0.0450	0.1352	0.0664	0.0296	0.0862	0.1466	0.0555	0.2184	0.0221	0.2010	0.0026	0.0893
	3.00	9.57	50.13	1.119	0.214	0.0392	0.1466	0.0627	0.0369	0.0752	0.1682	0.0460	0.2370	0.0176	0.2097	0.0020	0.0905
	∞																

## 2.5. Pórtico con sección variable sometido a cargas de viento

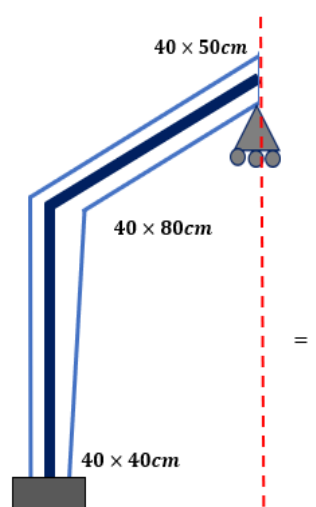
El cálculo manual es el primer paso a realizar, se analizará toda la estructura utilizando el método de rigidez directa, considerando en los elementos estructurales solo deformación por flexión. El pórtico será susceptible a cargas de viento y tendrá las siguientes características en

conexión con la estructura: un pórtico de dimensiones variables (C inicial = 40\*40 cm, C final = 40\*80 cm, V inicial = 40\*80 y V final = 40\*50). A lo largo del marco, se consideran  $EA = \infty$  y  $E = cte$ . Para el estudio estructural se sugirió el siguiente pórtico, y también se conocen los valores de los componentes estructurales que lo conforman.

**Figura 10**  
Pórtico de sección variable sometido a cargas de viento



**Figura 11**  
Simetría

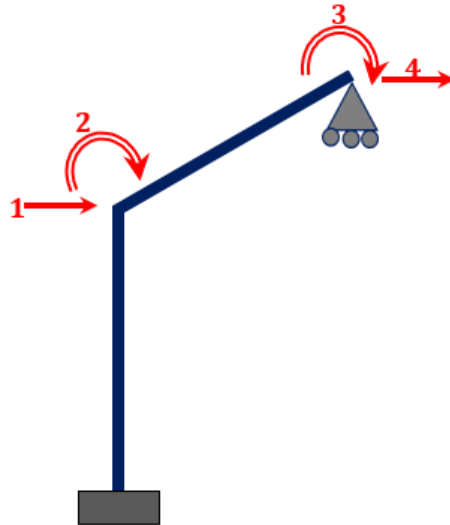


### 2.5.1. Primer paso: sistema Q-D

El uso del sistema Q-D en la formulación de matrices de rigidez simplifica considerablemente el análisis estructural, permitiendo el manejo eficiente de sistemas con múltiples grados de libertad” (Klaus Jürgen, 1996). En el sistema Q-D se identifican los grados de libertad que

pueda tener la estructura, teniendo en cuenta las restricciones planteadas, estos grados reflejan los movimientos y rotaciones que sufre el pórtico analizado sin producir fuerzas internas. Identificados los grados de libertad se los enumera en cualquier orden, lo cual ayuda a su representación matricial.

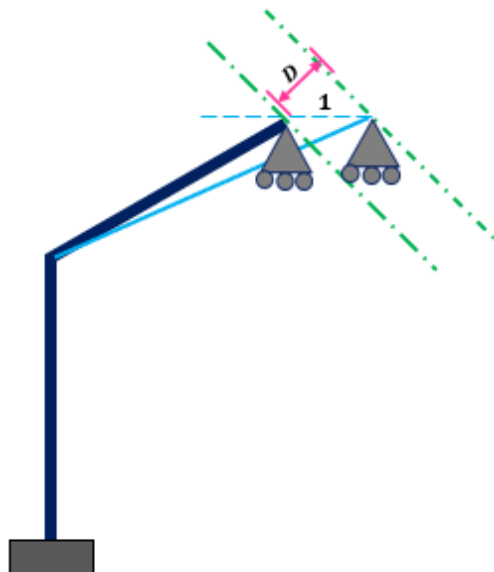
**Figura 12**  
*Sistema Q-D general*



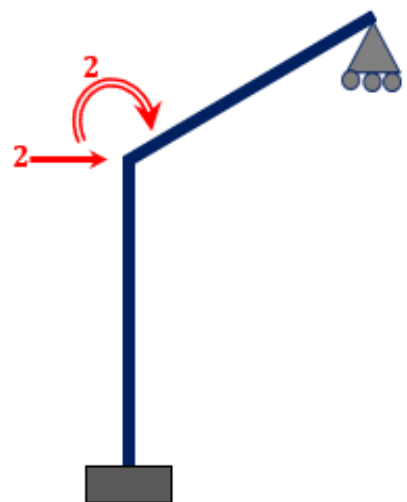
El grado de libertad 4 produce fuerza axial por lo cual se elimina, por la teoría de “Apoyo diferente al empotrado y que solo llegue una

barra” se elimina el grado de libertad 2. Entonces el sistema Q-D quedaría de la siguiente manera:

**Figura 13**  
*Deformación cuando  $D4=1$*



**Figura 14**  
*Sistema Q-D definido*



### 2.5.2. Segundo paso: cálculo de la rigidez

Se trabaja con la rigidez menor considerando  $E$  como constante, donde:

$$1 = 40^3 = 6400 = I$$

$$2 = 80^3 = 512000 = 8I$$

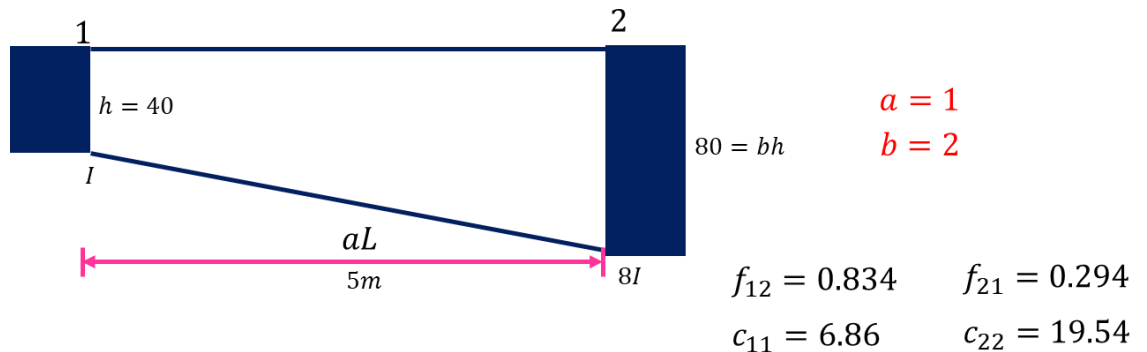
$$3 = 50^3 = 125000 = \frac{125}{64}I$$

### 2.5.3. Tercer paso: rigidez de los elementos

La rigidez de las estructuras es la capacidad de un elemento estructural para resistir las deformaciones y soportar cargas sin deformarse o desplazarse demasiado (Claros, s.f.). La rigidez de los elementos juega un papel crucial ya que nuestro pórtico al tener sección variable, la rigidez varia en cada elemento estructural. Para el cálculo de rigidez de los elementos se utilizó los factores de transporte, la cual obtendremos de la Tabla 1.

**Figura 15**

Elemento de sección variable ( 1 – 2 ) factores de transporte



Una vez tengamos los factores de transporte se utiliza la siguiente fórmula para hallar la matriz de rigidez de la columna.

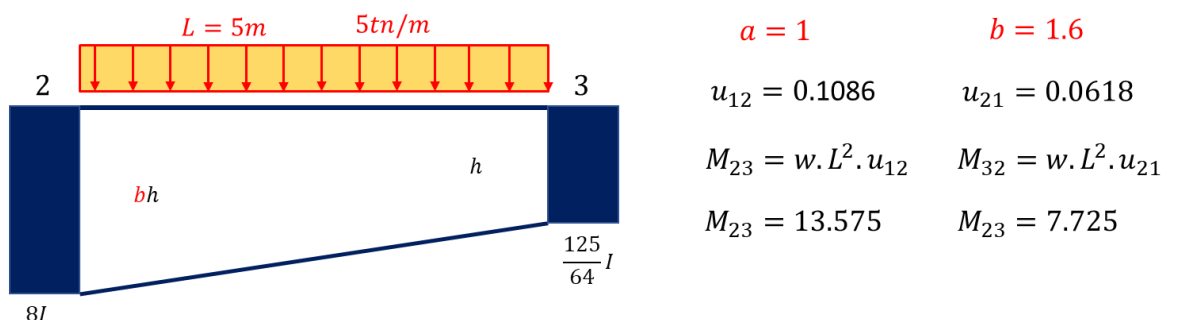
$$K_{col} = \begin{bmatrix} \frac{c_{11}}{L} \times 1I & K_{22} \times f_{21} \\ K_{11} \times f_{12} & \frac{c_{22}}{L} \times 1I \end{bmatrix} \quad K_{col} = \begin{bmatrix} 1.372 & 1.144 \\ 1.144 & 3.89 \end{bmatrix}$$

$I$  minimo

### 2.5.4. Cuarto paso: MEP - cargas sobre la barra

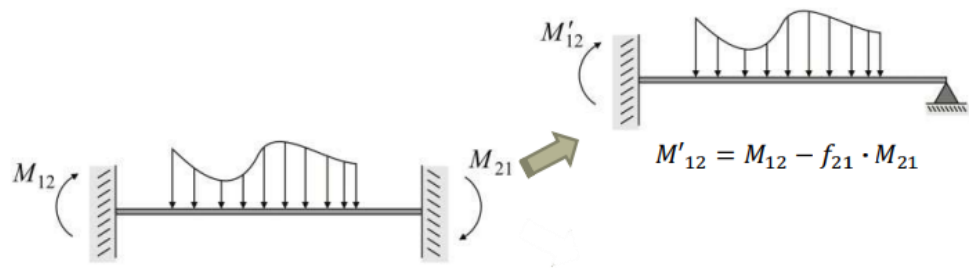
**Figura 16**

Momentos de empotramiento elemento 2-3





**Figura 17**  
MEP-Factor de transporte



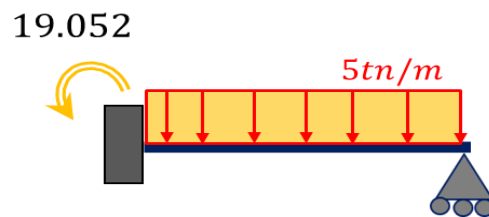
Donde:

$$M'_{23} = M_{12} - f_{21} \times M_{12}$$

$$M'_{23} = -13.575 - 0.709 \times 7.725$$

$$M'_{23} = -19.52$$

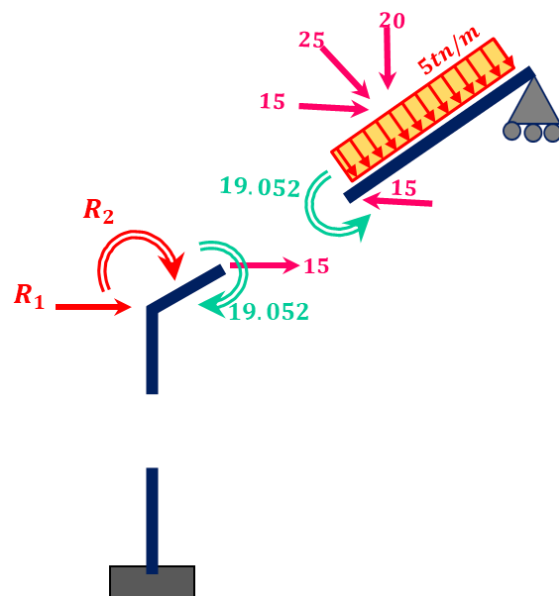
**Figura 18**  
MEP - aplicando el factor de transporte



#### 2.5.5. Quinto paso: sistema primario

Es el vector resultante producido por las cargas sobre la barra.

**Figura 19**  
Cálculo de sistema primario



Donde  $R_1 = -15$  ,  $R_2 = -19.052$  , entonces:

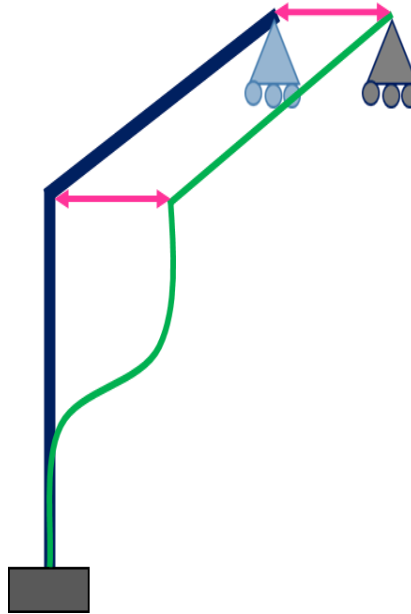
$$R = \begin{Bmatrix} -15 \\ -19.052 \end{Bmatrix}$$

### 2.5.6. Sexto paso: sistema complementario

Es el vector resultante producido al generar un desplazamiento unitario ( $D=1$ ) en los grados de libertad definidos en el sistema Q-D.

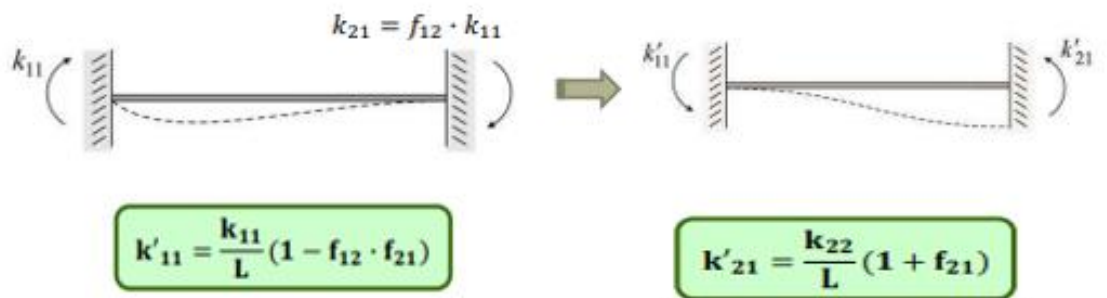
**Figura 20**

*Deformación producida al liberar el grado de libertad 1*



**Figura 21**

*Factor de transporte aplicado al caso 03*



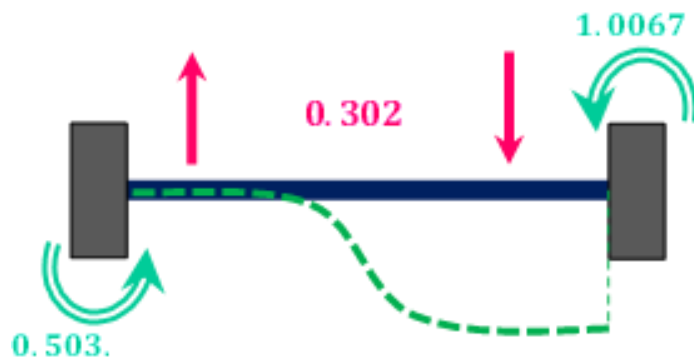
Donde:

$$K'_{11} = \frac{1.372}{5} (1 + 0.834) = 0.503$$

$$K'_{21} = \frac{3.89}{5} (1 + 0.294) = 1.0067$$

**Figura 22**

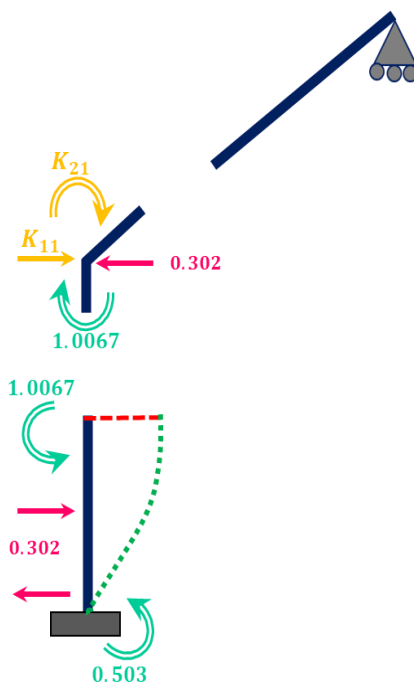
*Nuevos valores de deformación aplicando los Factores de transporte*



Aplicamos las condiciones de equilibrio ( $\Sigma M=0$ ;  $\Sigma F=0$ ) para ubicar la matriz de rigidez del elemento 1-2.

**Figura 23**

*Nuevos valores de deformación aplicando los Factores de transporte*



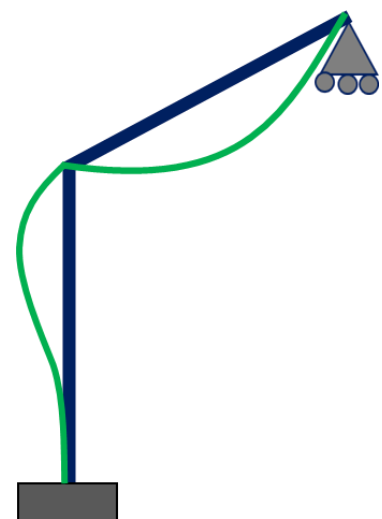
Donde:

$$K_{11} = 0.302$$

$$K_{21} = -1.0067$$

**Figura 24**

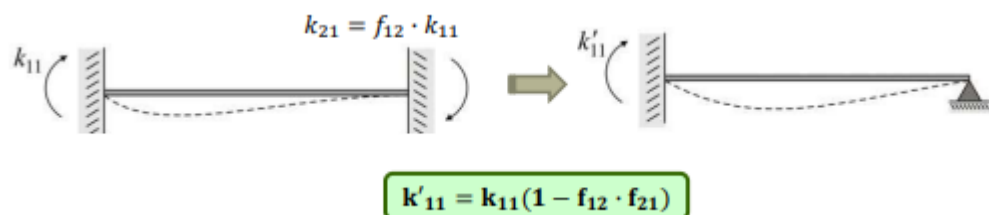
*Deformación al liberar el grado de libertad 2*



Factor de transporte: aplicamos la formula respecto al caso 01

**Figura 25**

*Factor de transporte aplicado al caso 01*



Donde:

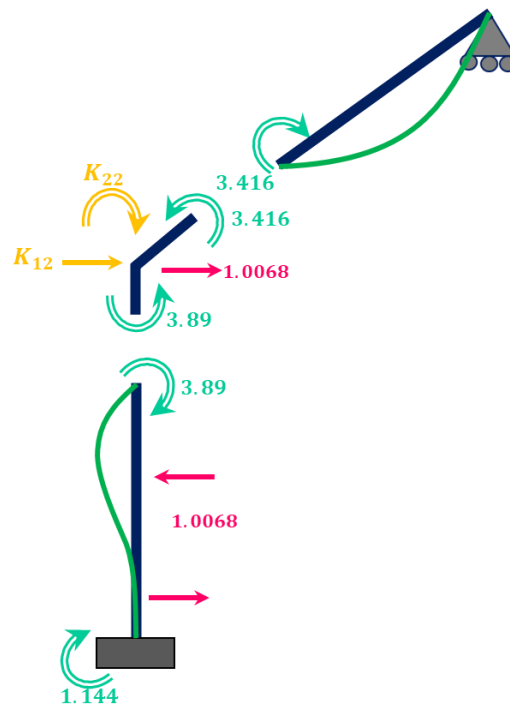
$$K'_{11} = 4.543(1 - 0.35 \times 0.709) = 3.416$$

**Figura 26**  
*Deformación aplicada el factor de transporte*



Aplicamos las condiciones de equilibrio ( $\Sigma M=0$ ;  $\Sigma F=0$ ) para ubicar la matriz de rigidez del elemento 2-3.

**Figura 27**  
*Matriz de rigidez del elemento 2-3*



Donde:

$$K_{12} = -1.007$$

$$K_{22} = 7.306$$

Ensamblamos la matriz de rigidez de la estructura.

$$K = \begin{bmatrix} 0.302 & -1.007 \\ -1.007 & 7.306 \end{bmatrix}$$

### 3. RESULTADOS

#### 3.1. Vector de deformaciones

Un término matemático conocido como vector de deformación describe los cambios que experimenta un material o estructura en respuesta a cargas o fuerzas de fuentes externas. Este vector puede entenderse en términos generales como una representación de los desplazamientos y deformaciones que sufren ubicaciones particulares de un objeto en relación con su estado original.

El vector de deformación es esencial en el análisis estructural para evaluar el comportamiento de la estructura bajo diferentes escenarios de carga. Se utiliza junto con la matriz de rigidez y el vector de fuerza para resolver ecuaciones de equilibrio y determinar el sobrepaso del sistema (Rupay Vargas, 2024).

$$D = [K]^{-1} \times (Q - R)$$

$$D = \begin{bmatrix} 0.302 & 1.007 \\ -1.007 & 7.306 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -15 \\ -19.052 \end{Bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 108.000 \\ 17.494 \end{bmatrix}$$

#### 3.2. Fuerzas internas

Las cargas externas aplicadas a una estructura generan fuerzas internas, para evaluar mejor las deformaciones necesitamos una mejor comprensión de las fuerzas internas.

Las fuerzas internas juegan un rol muy importante en la ingeniería civil, ya que se requiere la aplicación de estas para que las grandes construcciones puedan soportar cargas externas, que son el resultado de las

interacciones entre elementos estructurales. Los ingenieros pueden analizar y calcular las fuerzas internas en un elemento haciendo uso de métodos como el enfoque de elementos finitos o el método de rigidez directa, así cumpliendo los estándares de seguridad.

$$Q = \{R\} + [K] \times \{D\}$$

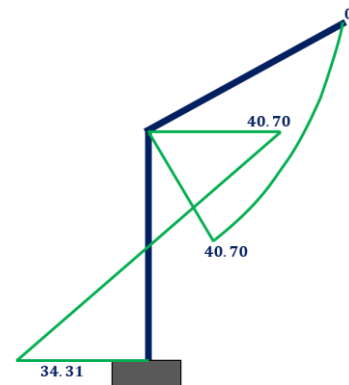
$$Q = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -19.052 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.503 & 1.144 \\ -1.007 & 3.89 \\ 0 & 3.416 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times D$$

$$Q = \begin{Bmatrix} -34.31 \\ -40.70 \\ 40.70 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

#### 3.3. Diagrama de momento flector

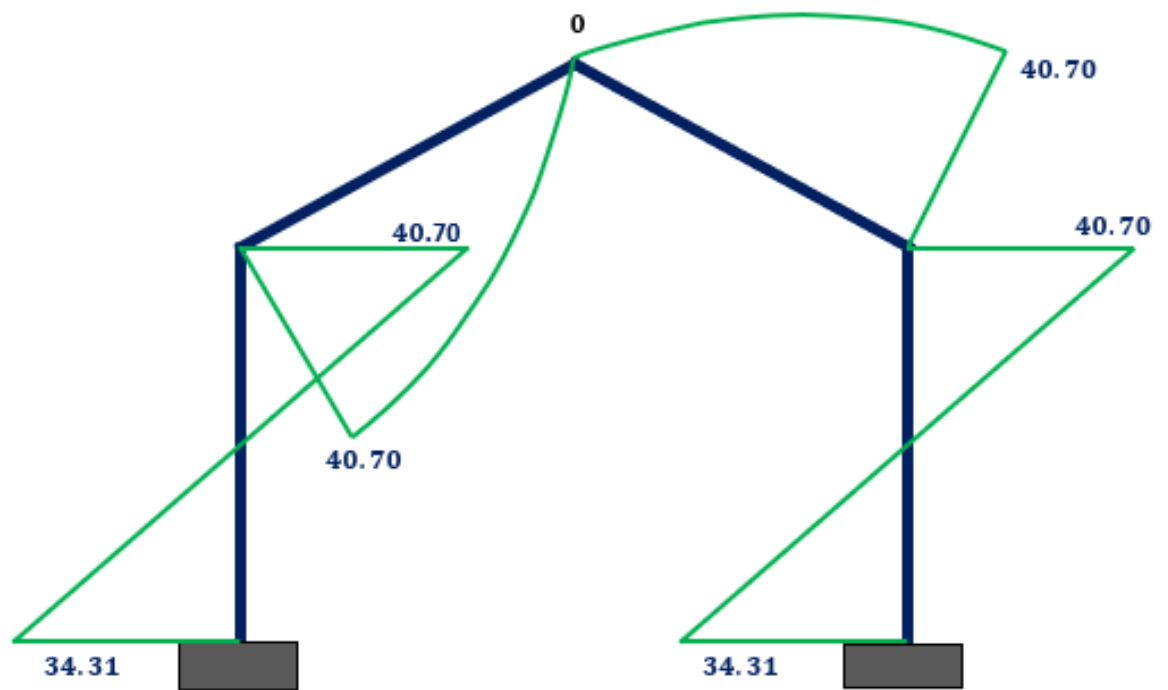
**Figura 25**

*Diagrama de momento flector*



**Figura 26**

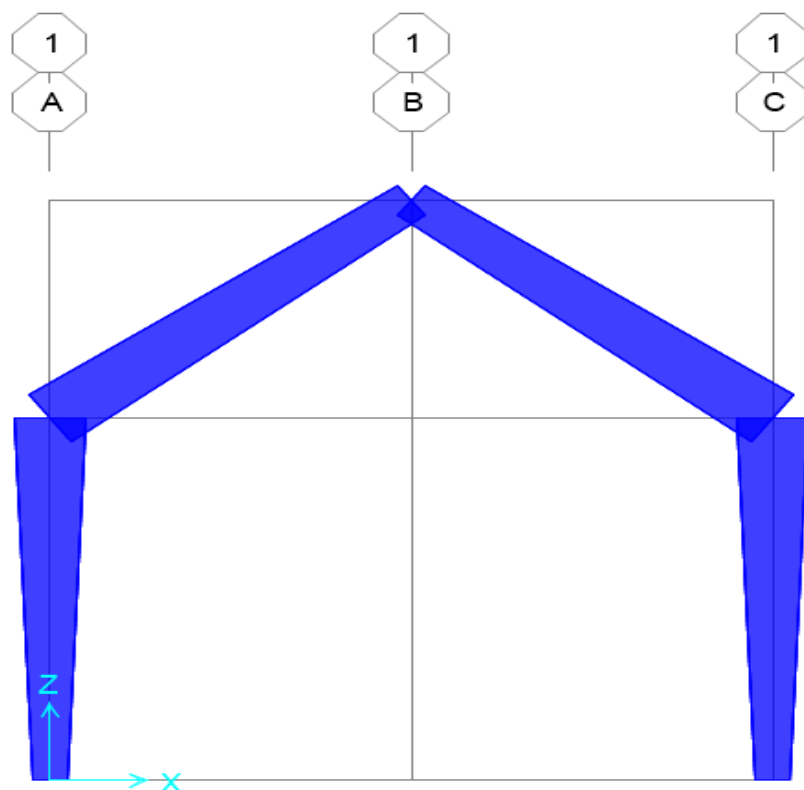
*Diagrama de momento flector del pórtico*



### 3.4. Comprobación con el programa SAP 2000

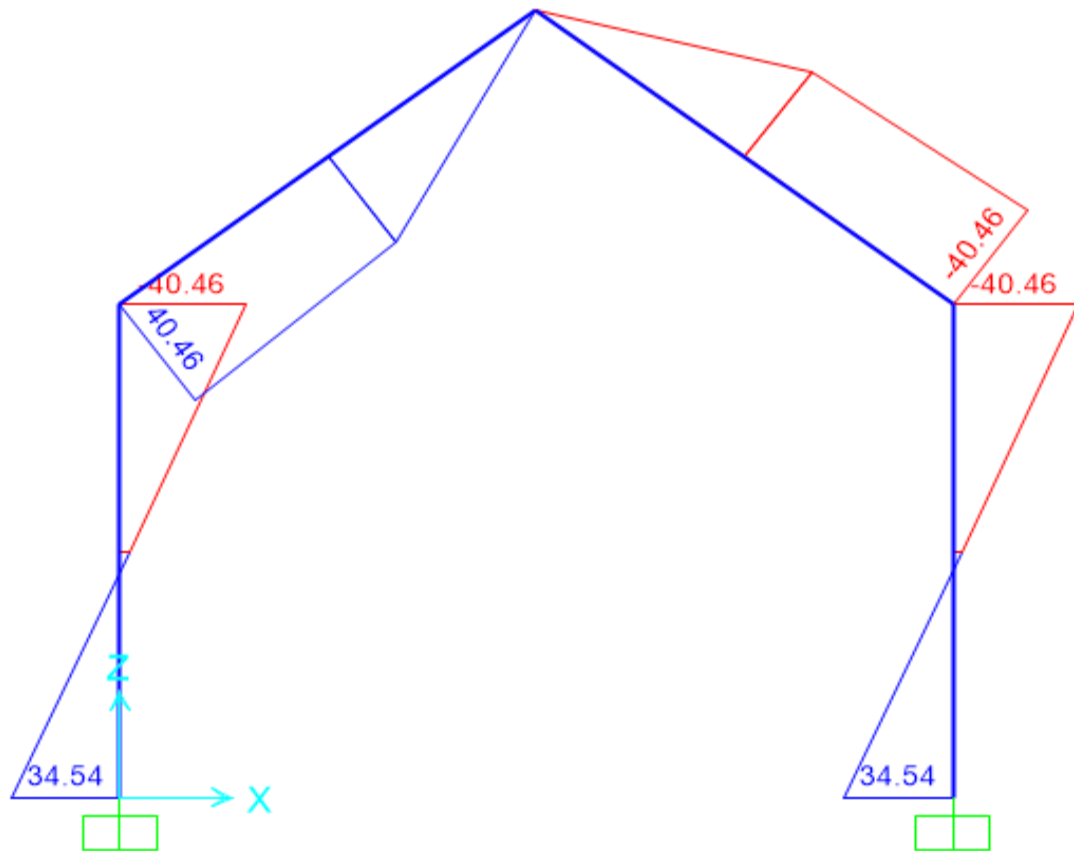
**Figura 27**

*Diseño del pórtico con sección variable*



**Figura 28**

*Diagrama de momento flector obtenido con el SAP 2000*



#### 4. DISCUSIÓN

El método de la rigidez es una técnica ampliamente utilizada en el análisis estructural para conocer el comportamiento y la respuesta de un sistema a cargas externas. Aunque este método es reconocido por su eficiencia y facilidad de uso, existe un debate continuo sobre si representa con precisión la realidad estructural o es una simplificación excesiva que podría conducir a resultados erróneos en comparación con el software.

Tras haber analizado el comportamiento de la estructura y compararla con el programa SAP, se puede inferir lo siguiente, los factores de

transporte son formulas fiables y pueden ser aplicados a estructuras con sección variable, siempre y cuando cumplan con las características establecidas, también se debe de tener en cuenta los conceptos básicos, tales como “estructura simétrica con carga antisimétrica” y como aplicarlos en diversas situaciones.

Entender el comportamiento de la estructura, saber como definir los grados de libertad teniendo como restricción que la fuerza axial= $\infty$ , y poder emplear los conceptos básicos de ingeniería.

.

#### 5. CONCLUSIÓN

Haciendo la comparación entre lo resuelto y el modelado en el programa SAP 2000, se puede concluir que el método de la rigidez directa aplicado a secciones variables es confiable ya que se tiene una variación mínima de  $\pm 0.2$ , la cual se podría inferir que es por la aproximación de los valores decimales.

En pocas palabras, la técnica de rigidez directa proporciona un instrumento fiable y preciso para el estudio y diseño de estructuras en ingeniería civil. Este enfoque, que se basa en la teoría de la

elasticidad, permite calcular las fuerzas internas y las deformaciones de forma organizada y sencilla. Este enfoque se recomienda para el diseño estructural porque logra un compromiso entre la precisión de los resultados y la facilidad del análisis. Su versatilidad como herramienta para ingenieros se demuestra aún más por la amplia gama de desafíos estructurales a los que se puede aplicar. No obstante, debe recordarse que el enfoque de la rigidez directa puede resultar desafiante en situaciones que involucran estructuras no lineales o geometrías intrincadas,

y que requiere una comprensión firme de la teoría de la elasticidad (Godiña Poma , Lopez Yarango , & Rupay Vargas , 2017).

## 6. REFERENCIA BIBLIOGRÁFICA

- Kumar Ghosh, S., & Anthony Fanella, D. (2003). *Diseño sísmico y eólico de edificios de hormigón (2000 IBC, ASCE 7-98, ACI 318-99)*. (2. International Code Council, Ed.) PCA (Portland Cement Association). Recuperado el 16 de Junio de 2024, de [https://books.google.com.pe/books?hl=es&lr=&id=ldx5LymycbwC&oi=fnd&pg=PR13&dq=\(ghosh+s.+k.+%26+fanella+d.+a.+2003\).+pdf&ots=k\\_EcvKbFD-&sig=DLW6dyieMYqDwhZHyA6LRQU5MeM#v=onepage&q&f=false](https://books.google.com.pe/books?hl=es&lr=&id=ldx5LymycbwC&oi=fnd&pg=PR13&dq=(ghosh+s.+k.+%26+fanella+d.+a.+2003).+pdf&ots=k_EcvKbFD-&sig=DLW6dyieMYqDwhZHyA6LRQU5MeM#v=onepage&q&f=false)
- Carrillo, D. (2018). Metodo de rigidez directa. Obtenido de <https://es.slideshare.net/slideshow/metodo-de-rigidez-directa/86588451>
- Claros, E. (s.f.). 360 en concreto. Obtenido de 360 en concreto: <https://360enconcreto.com/blog/detalle/rigidez-de-las-estructuras-y-resistencia-del-concreto/>
- COLUNGA, A. T. (24 de Enero de 2021). Rigidez elástica de elementos de sección variable. Obtenido de Rigidez elástica de elementos de sección variable.
- Godiña Poma , D., Lopez Yarango , I., & Rupay Vargas , I. (2017). Analisis estructural I. Huancayo.
- Kassimali, A. (2014). Análisis Estructural 5°. Cengage Learning. Obtenido de [https://www.academia.edu/download/62254004/Analisis\\_estructural\\_\\_5ta\\_Edicion\\_-Aslam\\_Kassimali20200302-123290-hrpva8.pdf](https://www.academia.edu/download/62254004/Analisis_estructural__5ta_Edicion_-Aslam_Kassimali20200302-123290-hrpva8.pdf)
- Klaus Jürgen, B. (1996). Finite Element Procedures. Meg Weist.
- Lizarza, J. T. (2011). Metodos de los elementos finitos para el analisis estructural. España : TECNUN. Obtenido de <https://core.ac.uk/download/pdf/83570224.pdf>
- O.C. Zienkiewicz, R. T. (2005). The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals. Barcelona, España: Butterworth-Heinemann 2000.
- Ottazzi Pasino, G. (2014). Apuntes del curso de analisis estructural. Perú: Pontificia Universidad Catolica del Perú. Obtenido de [https://www.academia.edu/43429476/2014\\_Gianfranco\\_Ottazzi\\_Pasino\\_APUNTES\\_DE\\_L\\_CURSO\\_AN%C3%81LISIS\\_ESTRUCTURAL\\_I\\_PONTIFICIA\\_UNIVERSIDAD\\_CATOLICA\\_DEL\\_PERU\\_FACULTAD\\_DE\\_CIENCIAS\\_E\\_INGENIER%C3%8DA\\_DEPARTAMENTO\\_DE\\_INGENIER%C3%ADA\\_SECCi%C3%93N\\_INGENIER%C3%ADA\\_CIV](https://www.academia.edu/43429476/2014_Gianfranco_Ottazzi_Pasino_APUNTES_DE_L_CURSO_AN%C3%81LISIS_ESTRUCTURAL_I_PONTIFICIA_UNIVERSIDAD_CATOLICA_DEL_PERU_FACULTAD_DE_CIENCIAS_E_INGENIER%C3%8DA_DEPARTAMENTO_DE_INGENIER%C3%ADA_SECCi%C3%93N_INGENIER%C3%ADA_CIV)
- PUCP. (s.f.). Analisis edificios cap. 02. Obtenido de Analisis edificios cap. 02: [repositorio.pucp.edu.pe](https://repositorio.pucp.edu.pe)
- Rupay Vargas, M. J. (2024). Apuntes Analisis estructural II:Metodo directo de la rigidez en armaduras. En R. V. Josue. Chanchamayo: Universidad Nacional Intercultural Juan Santos Atahualpa.