



ARTÍCULO ORIGINAL

Brazo rígido en pórticos empleando el método de rigidez sistematizado

Systematized rigidity method in rigid arm and shear deformation

• Marcos Rupay ¹ • Yesenia Baltazar ² • Asly Flores ³ • Anthony Reyes ⁴

¹Universidad Nacional Intercultural de la Selva Central Juan Santos Atahualpa, Chanchamayo, Perú.

Correo electrónico: mrupay@uniscjsa.edu.pe

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7891-1838>

²Universidad Nacional Intercultural de la Selva Central Juan Santos Atahualpa, Chanchamayo, Perú.

Correo electrónico: 73682950@uniscjsa.edu.pe

ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-7046-1448>

³Universidad Nacional Intercultural de la Selva Central Juan Santos Atahualpa, Chanchamayo, Perú.

Correo electrónico: 72283292@uniscjsa.edu.pe

⁴Universidad Nacional Intercultural de la Selva Central Juan Santos Atahualpa, Chanchamayo, Perú.

Correo electrónico: 73015061@uniscjsa.edu.pe

Recibido: 10 noviembre del 2023 / **Revisado:** 22 diciembre del 2023 / **Aprobado:** 29 diciembre del 2023 / **Publicado:** 22 de enero del 2024

RESUMEN

La investigación y redacción del presente artículo tuvo como principal objetivo el poder aplicar el método de rigidez sistematizado empleando baro rígido en pórticos como cálculo de forma manual. Para ello se tomó en consideración especial los temarios que se realizaron en la materia de Análisis Estructural 1 y 2 de la UNISCJSA tales como Sistemas Q-D, Sistema Primario, Sistema Complementario, Vectores de las Deformaciones y finalmente las Fuerzas Internas. Hemos podido dejar como argumento que para poder establecer los grados de libertad en el Sistema Q-D, y sus respectivas Fuerzas Internas para todas las barras que componen a la armadura que hemos seleccionado para el desarrollo. Para su desarrollo hemos empleado el método de la rigidez sistematizado y los procedimientos propios vistos en el curso de Análisis Estructural II en la UNISCJSA, siendo propios del sistema lo siguiente: Determinación del Sistema Q-D [Q], Determinación del sistema q-d (Local) Determinación de los coeficientes de Rigidez [K], Matriz de transformación, Matriz de rigidez de cada barra, Matriz de rigidez del sistema, Vector de Deformación [D] y fuerza de cada q-d y Rigidez Lateral. La estructura de brazo rígido en pórtico, se desarrolló considerando deformación por corte en placa y de la misma manera en todos los elementos estructurales, tanto en placa, columna y viga. Respecto a la estructura desarrollada, tiene como características lo siguiente; es un pórtico con dimensiones en la viga, columna y muros. Se considera el $EA = \infty$ en toda la estructura.

Palabras claves: Brazos rigidos; matriz de transformación; vector de deformaciones; fuerzas internas; método de rigidez sistematizado.

ABSTRACT

The main objective of the research and writing of this article was to be able to apply the systematized rigidity method using rigid bar in frames as a manual calculation. For this, special consideration was taken of the syllabi that were carried out in the subject of Structural Analysis 1 and 2 of the UNISCJSA such as Q-D Systems, Primary System, Complementary System, Deformation Vectors and finally Internal Forces. We have been able to leave as an argument that in order to establish the degrees of freedom in the Q-D System, and their respective Internal Forces for all the bars that make up the reinforcement that we have selected for development. For its development we have used the systematized rigidity method and the procedures seen in the Structural Analysis II course at UNISCJSA, the following being typical of the system: Determination of the Q-D System [Q], Determination of the q-d system (Local) Determination of the Stiffness coefficients [K], Transformation Matrix, Stiffness Matrix of each bar, System Stiffness Matrix, Deformation Vector [D] and force of each q-d and Lateral Stiffness. The rigid arm frame structure was developed considering shear deformation in the plate and in the same way in all the structural elements, both in plate, column and beam. Regarding the developed structure, it has the following characteristics: It is a porch with dimensions in the beam, column and walls. $EA = \infty$ is considered throughout the structure.

Keywords: Stiff arms; transformation matrix; deformation vector; internal forces; systematized rigidity method.

1. INTRODUCCIÓN

La introducción de un método de rigidez sistematizado en el análisis estructural es fundamental para comprender y evaluar el comportamiento de las estructuras ante cargas y condiciones diversas. Este enfoque, también conocido como el método de rigidez directa (2018), se ha convertido en una herramienta invaluable en ingeniería estructural debido a su capacidad para modelar y analizar sistemas complejos de manera eficiente y precisa. En el análisis estructural tradicional, (l)as fuerzas y deformaciones se consideran en función de las relaciones de equilibrio y compatibilidad. Sin embargo, el método de rigidez sistematizado va más allá, al permitir el análisis de la estructura en elementos discretos y la formulación sistemática de las matrices de rigidez asociadas a cada uno de estos elementos.

Este enfoque proporciona una base matemática sólida para representar la rigidez estructural y las relaciones de desplazamiento entre nodos, lo que facilita la formulación de un sistema de ecuaciones lineales que describen el comportamiento global de la estructura. (2020) Al emplear matrices de rigidez para cada elemento, se logra una representación eficiente y modular, lo que simplifica el análisis de estructuras complejas mediante el uso de métodos numéricos. En esta investigación, exploraremos en detalle el método de rigidez sistematizado y su aplicación en el análisis estructural 2D. Examinaremos cómo este enfoque permite modelar con precisión una variedad de condiciones de carga, geometrías y materiales, brindando a los ingenieros una herramienta versátil para evaluar la estabilidad y el rendimiento de las estructuras en diferentes situaciones. A medida que avanzamos en este estudio, abordamos la implementación práctica del método de rigidez sistematizado a través de ejemplos específicos, destacando su utilidad en el diseño y la optimización de estructuras. Además, discutiremos las ventajas y limitaciones de este enfoque, así como su relevancia en el contexto de las tecnologías modernas de simulación y análisis estructural. En resumen, este trabajo busca proporcionar una comprensión completa del método de rigidez sistematizado y su aplicación en el análisis estructural 2D, destacando su importancia en la ingeniería civil y estructural contemporánea.

Cuando se aborda el análisis estructural de edificaciones, los pórticos con brazos rígidos representan un modelo fundamental. Estos sistemas, compuestos por elementos verticales y horizontales interconectados, ofrecen una representación simplificada de estructuras más complejas. La introducción de brazos rígidos en los pórticos es un enfoque crucial para comprender su comportamiento ante cargas y

fuerzas externas. (2022) El análisis de estos pórticos con brazos rígidos implica un estudio detallado de la distribución de cargas, momentos, reacciones en los apoyos y desplazamientos. (2009) La incorporación de brazos rígidos en este contexto facilita la comprensión de la transferencia de fuerzas a través de la estructura, así como la resistencia y estabilidad global del sistema. Al emplear métodos como el de rigidez sistematizado, se logra una evaluación precisa de la respuesta de los pórticos con brazos rígidos frente a diferentes condiciones de carga. Esto no solo permite comprender el comportamiento estructural, sino que también habilita la optimización del diseño, garantizando la eficiencia y seguridad de la edificación. En esta introducción al análisis de pórticos con brazos rígidos, se destaca la importancia de comprender cómo estos sistemas simplificados reflejan y responden a las fuerzas y cargas que actúan sobre las estructuras reales, brindando así una base fundamental para el diseño y la ingeniería estructural.

(Ottazzi Pasino, 2014) explica que la finalidad de este método es el desarrollo de una serie de ecuaciones para la obtención de cargas internas desarrolladas en los extremos de los elementos, cargas de tipo nodal. Así mismo, el autor expone que el método en mención se basa en la superposición de desplazamientos, los cuales son asociados a los grados de libertad, por lo que es muy importante definirlos correctamente. El método de rigidez sistematizado en una secuencia de operaciones matriciales que permite conocer la matriz de rigidez de la estructura k a partir de las matrices de rigidez de todas las componentes k . Ensamblar la matriz de rigidez de la estructura es el principal objetivo del método. Luego se calculan los desplazamientos en los GDL considerados en la estructura (globales) D y se podrán conocer los desplazamientos en los GDL de cada barra (locales) d . La relación entre ambos grados de libertad (GDL) se puede mediante la matriz de transformación A . Se puede plantear 6 GDL locales por barra tipo pórtico y 2 GDL por barra tipo armadura, aunque se pueden omitir los que serán nulos. La matriz de rigidez de cada barra es la matriz, ya conocida, de cada barra conociendo sus condiciones de apoyo. La matriz dependerá de los grados de libertad que se consideran. También la matriz de transformación es aquella que permite relacionar los GDL del sistema general (Q-D) con los GDL de cada componente o barra (q-d). De esta manera, a partir de los desplazamientos del sistema en sus GDL (Q-D) pueden obtenerse los desplazamientos de cada componente en sus GDL (q-d). también el brazo rígido según Palomino (2016) el brazo rígido se refiere a la sección central inalterable que se

encuentra entre la conexión de elementos estructurales. En la representación gráfica, se ilustra la conexión entre una viga y una columna, aplicadas en estructuras de armado concreto. En

el proceso de modelado, es posible emplear un factor de rigidez para el nudo, variando generalmente entre 0,7 y 0,9.

2. MATERIALES Y MÉTODOS

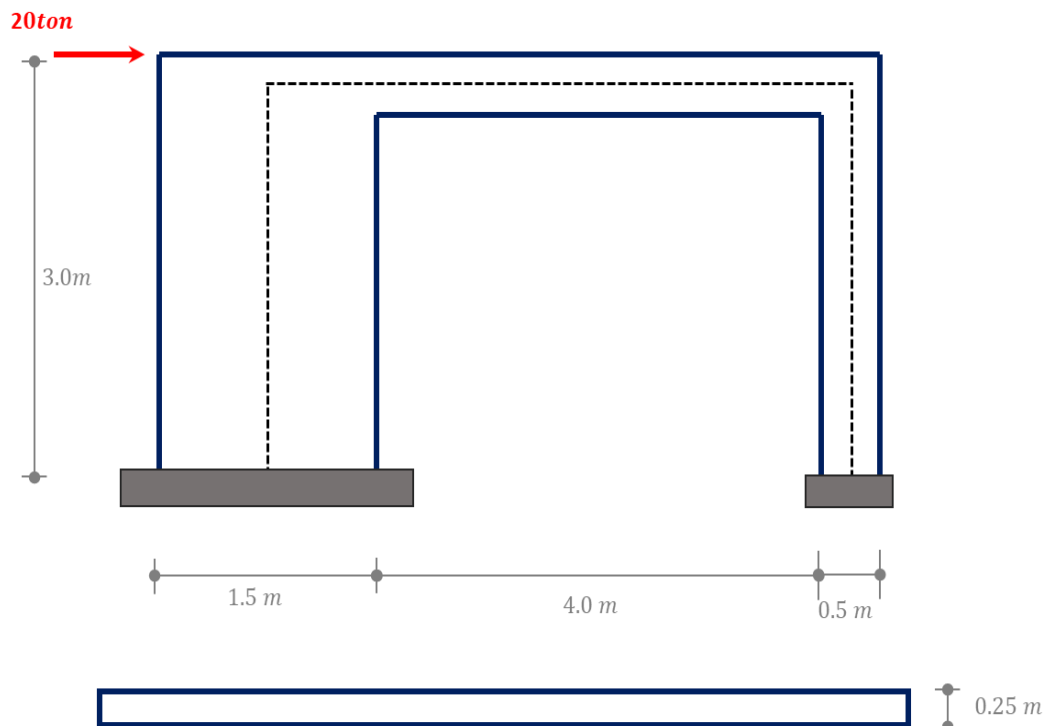
2.1. Deformación por corte aplicado a placa

El método con el que hemos considerado trabajar es el Rigidez Sistematizado ya que es un tema muy conocido y aplicado en cualquier tipo de estructura ya sean pórticos, armaduras, articulaciones, etc. Ante ello lo que se realizó es elaborar una armadura estable con el mismo módulo de elasticidad para cada barra. Lo primero a realizar es el cálculo de forma manual en toda la estructura utilizando el método de rigidez sistematizado con brazo rígido en el pórtico, considerando deformación por corte aplicado en placa, y de la misma

manera en todos los elementos estructurales, tanto en placa, columna y viga. Respecto a la estructura desarrollada, tiene como características lo siguiente; es un pórtico con dimensiones en la viga $25 \times 50 \text{ cm}$, columna $25 \times 50 \text{ cm}$ y muros $25 \times 150 \text{ cm}$, $E = 2.5 \times 10^6 \text{ Tn/m}^2$, $\frac{E}{G} = 2.3$. Se considera el $EA = \infty$ en toda la estructura. La armadura planteada para el Análisis Estructural fue la siguiente y además se sabe que las barras que la componen presentan los siguientes valores:

Figura 1

Estructura con brazo rígido en pórtico.



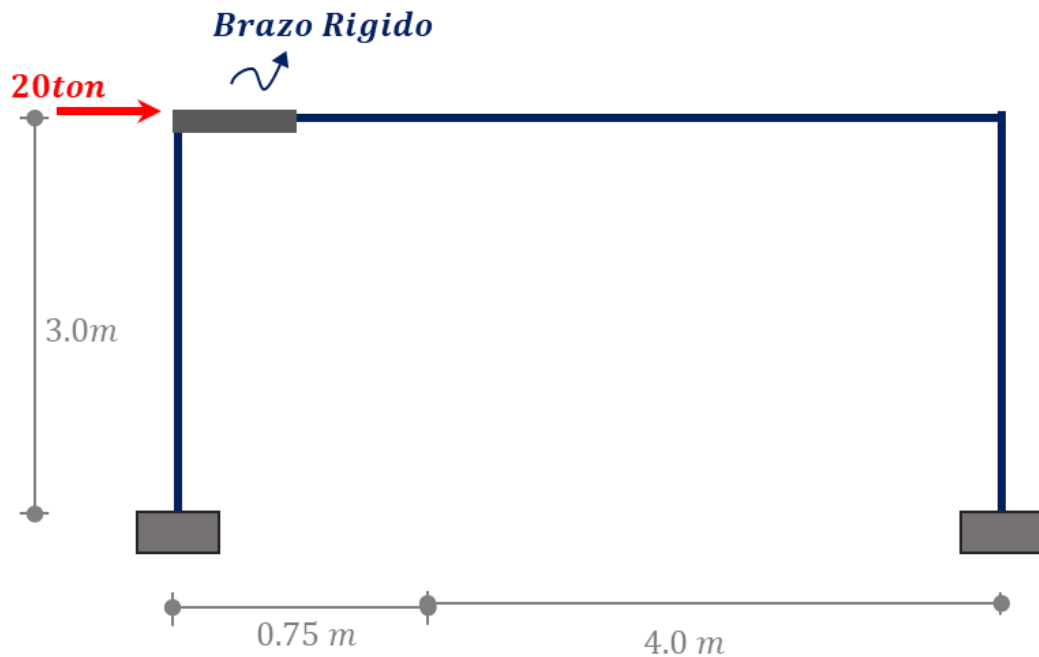
$VIGAS = 25 \times 50 \text{ cm}$
 $COLUMNAS = 25 \times 50 \text{ cm}$
 $MUROS = 25 \times 150 \text{ cm}$
 $E = 2.5 \times 10^6 \text{ Tn/m}^2$
 $\frac{E}{G} = 2.3$
 $EA = \infty$

❖ Considerar deformación por cortante en los muros

2.2. Modelo matemático

Figura 2

Modelo matemático de la estructura.



Hallando la proporción de placa, viga y columna:

$$EI = \frac{78125}{12}$$

$$I = \frac{1}{384}$$

$$E = 2.5 \times 10^6$$

$$I_{placa} = \frac{0.25(2.5)^3}{12} = \frac{9}{128}$$

$$I_{viga} = \frac{0.25(0.5)^3}{12} = \frac{1}{384} = 0.0026$$

$$I_{columna} = \frac{0.25(0.5)^3}{12} = \frac{1}{384} = 0.0026$$

2.2.1. Primer Paso: Sistema Q-D

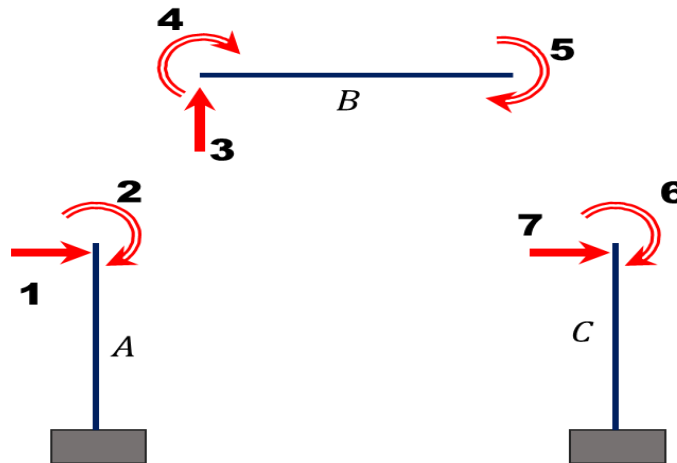
La definición del Sistema QD, se propone el sistema QD basado en los grados de libertad de rigidez. En esta fase inicial, es necesario identificar los grados de libertad de rigidez presentes en el sistema. Estos grados de libertad reflejan los movimientos o giros que pueden ocurrir en la estructura sin inducir fuerzas internas. Una vez

identificados estos grados de libertad, se procede a asignarles etiquetas o números con el objetivo de simplificar su representación en forma matricial. Cada grado de libertad se designa con una letra o número único que lo distingue claramente en el análisis estructural.

Figura 3
Sistema Q1-D1



Figura 4
Sistema q-d



2.2.2. Matriz de transformación

	D1	D2	D3	
A =	1	0	0	d_1
	0	1	0	d_2
	0	0.75	0	d_3
	0	1	0	d_4
	0	0	1	d_5
	0	0	1	d_6
	1	0	0	d_7

2.2.3. Matriz de rigidez de cada barra

En el contexto de un método de rigidez sistematizado, la matriz de transformación juega un papel esencial al permitir la relación entre las coordenadas locales y globales de un elemento estructural. Esta matriz facilita la transición entre el sistema de coordenadas local, que está alineado con el elemento estructural, y el sistema de coordenadas global, que se

relaciona con el sistema global de la estructura completa.

La matriz de transformación, comúnmente denominada como K , es una matriz cuadrada que se utiliza para transformar los vectores de desplazamientos, fuerzas y rigidez de un sistema local al sistema global y viceversa, considerando deformación por placa la formula a aplicar en la viga es :

$$[K_A] = \begin{bmatrix} 4 + \alpha & 2 - \alpha \\ 2 - \alpha & 4 + \alpha \end{bmatrix} \frac{27EI}{L(1+\alpha)} ; \quad \alpha = \frac{12 EI}{GA'L^2}$$

$$\alpha = \frac{12 EI}{GA'L^2} = 12 * \frac{E}{G} * \frac{I}{A'} * \frac{1}{L^2} ; \quad A' = \frac{b(h)}{1.2} ; \quad \frac{E}{G} = 2.3$$

$$\alpha = 12 * \frac{23}{10} * \frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{b(h)}{1.2}} * \frac{1}{L^2}$$

$$\alpha = 12 * \frac{23}{10} * \frac{1.2 h^2}{12} * \frac{1}{L^2} = 12 * \frac{23}{10} * \frac{1.2 (1.5)^2}{12} * \frac{1}{(3)^2}$$

$$\alpha = 0.69$$

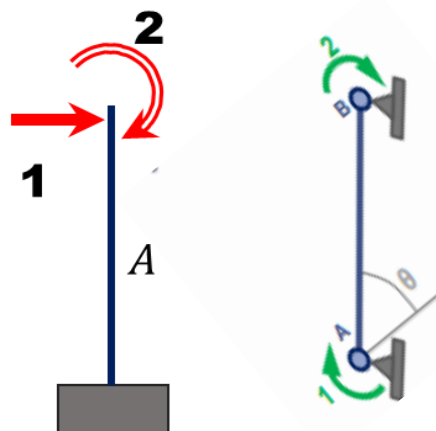
Entonces:

$$[K_A] = \begin{bmatrix} 4.69 & 1.31 \\ 1.31 & 4.69 \end{bmatrix} \frac{27EI}{5.07}$$

$$[K_A] = \begin{bmatrix} 24.9763 & 6.9763 \\ 6.9763 & 24.9763 \end{bmatrix} EI$$

$$K_{barra} = \frac{EI}{L(1+\alpha)} \begin{bmatrix} 4 + \alpha & 2 - \alpha \\ 2 - \alpha & 4 + \alpha \end{bmatrix}$$

Figura 4
Análisis de deformación por placa.



Por equilibrio tenemos :

$$[k'] = \begin{bmatrix} 24.9763 & 6.9763 & -10.6509 & -10.6509 \\ 6.9763 & 24.9763 & -10.6509 & -10.6509 \\ -10.6509 & -10.6509 & 7.1 & 7.1 \\ -10.6509 & -10.6509 & 7.1 & 7.1 \end{bmatrix} EI$$

$$[K_A] = \begin{bmatrix} 7.1 & -10.6509 \\ -10.6509 & 24.9763 \end{bmatrix} EI$$

Figura 5

Análisis de deformación de la barra.

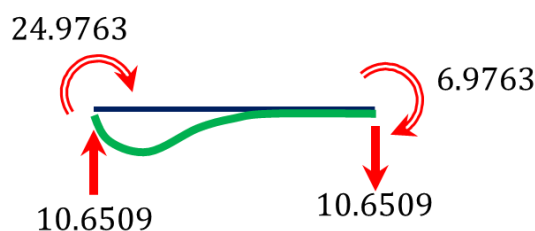
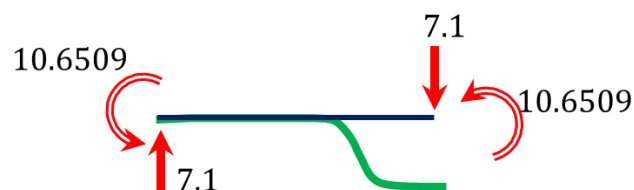


Figura 6

Análisis de deformación momentos.



$$[K_B] = \begin{bmatrix} 3/16 & -3/8 & -3/8 \\ -3/8 & 1 & 0.5 \\ -3/8 & 0.5 & 1 \end{bmatrix} EI$$

$$[K_C] = \begin{bmatrix} 4/9 & -2/3 \\ -2/3 & 4/3 \end{bmatrix} EI$$

2.2.4. MATRIZ DE RIGIDEZ DEL SISTEMA

La matriz de rigidez del sistema en el contexto de un "brazo rígido" y deformación por corte se refiere a la representación matricial de la rigidez estructural asociada a la capacidad de resistir esfuerzos cortantes en un elemento o componente particular de una estructura. En términos generales,

la matriz de rigidez del sistema contendrá información sobre cómo las fuerzas cortantes aplicadas al sistema se relacionan con los desplazamientos resultantes en el mismo. Esta matriz se deriva mediante consideraciones teóricas y métodos numéricos, y su forma exacta variará según el tipo específico de análisis y el modelo estructural utilizado.

$$[K] = \begin{bmatrix} 8.4333 & -10.6509 & -2/3 \\ -10.6509 & 26.6443 & 25/32 \\ -2/3 & 25/32 & 13/9 \end{bmatrix}$$

2.2.5. VECTOR DE CARGA

El vector de carga en el contexto del análisis estructural se refiere a un vector que representa las fuerzas aplicadas externamente a un sistema o estructura. Este vector tiene componentes que indican la magnitud, dirección y sentido de las cargas que actúan sobre la estructura. Las cargas pueden incluir fuerzas, momentos, desplazamientos prescritos o cualquier

otra influencia externa que afecte el comportamiento de la estructura.

La forma específica del vector de carga dependerá de la naturaleza del problema y de la estructura bajo consideración. Por ejemplo, en el análisis de una viga, el vector de carga puede incluir las fuerzas concentradas aplicadas, las cargas distribuidas a lo largo de la viga, y posiblemente momentos externos.

$$[Q] = \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.2.6. VECTOR DE DEFORMACIONES

El vector de deformación constituye una expresión matemática que caracteriza las alteraciones sufridas por un material o estructura al enfrentarse a fuerzas o cargas externas.

En líneas generales, este vector se interpreta como una indicación de cómo los puntos específicos de un objeto experimentan desplazamientos y deformaciones en comparación con su condición inicial.

$$[D] = [K]^{-1} \cdot [Q]$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 8.4333 & -10.6509 & -2/3 \\ -10.6509 & 26.6443 & 25/32 \\ -2/3 & 25/32 & 13/9 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 4.89313 \\ 1.92023 \\ 1.21978 \end{bmatrix}$$

$$[d_1] = [A_i] \cdot [D]$$

$$[d_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4.89313 \\ 1.92023 \\ 1.21978 \end{bmatrix}$$

$$\therefore [d_1] = \begin{bmatrix} 4.89313 \\ 1.92023 \end{bmatrix}$$

$$[d_2] = \begin{bmatrix} 0 & -0.75 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4.89313 \\ 1.92023 \\ 1.21978 \end{bmatrix}$$

$$\therefore [d_2] = \begin{bmatrix} -1.44018 \\ 1.92023 \\ 1.21978 \end{bmatrix}$$

$$[d_3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4.89313 \\ 1.92023 \\ 1.21978 \end{bmatrix}$$

$$\therefore [d_3] = \begin{bmatrix} 1.21978 \\ 4.89313 \end{bmatrix}$$

2.2.7. Fuerzas internas

$$[q_i] = [k_i] \cdot [d_i]$$

$$[q_1] = \begin{bmatrix} 14.29 \\ -4.16 \end{bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

$$[q_2] = \begin{bmatrix} -1.45 \\ 3.07 \\ 2.72 \end{bmatrix} \begin{matrix} (3) \\ (4) \\ (5) \end{matrix}$$

$$[q_3] = \begin{bmatrix} -2.72 \\ 5.71 \end{bmatrix} \begin{matrix} (6) \\ (7) \end{matrix}$$

Figura 7

Sistema q-d, grados de libertad local.

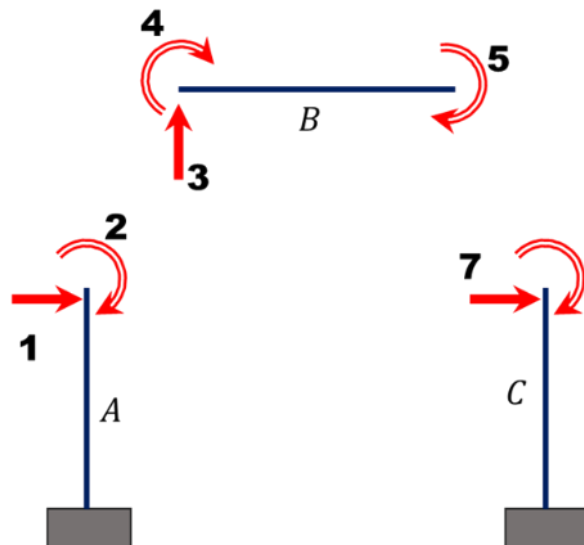


Figura 8

Análisis del diagrama de momento flector.

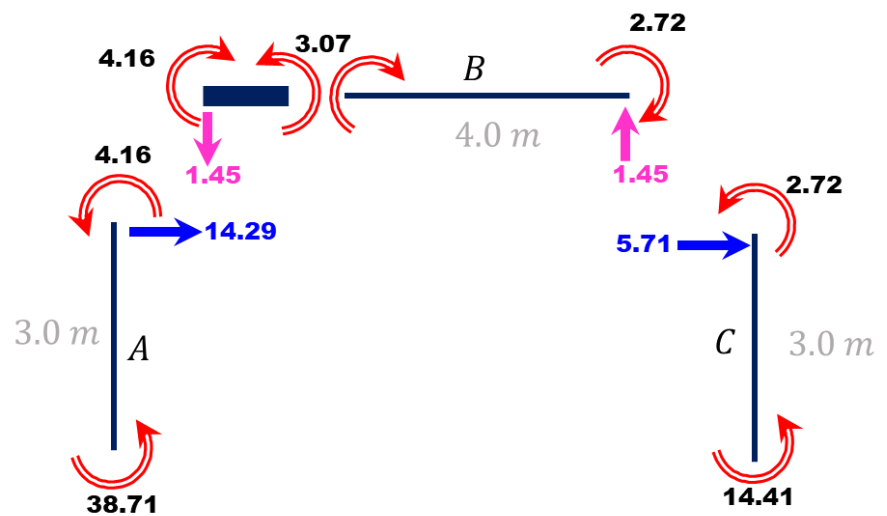
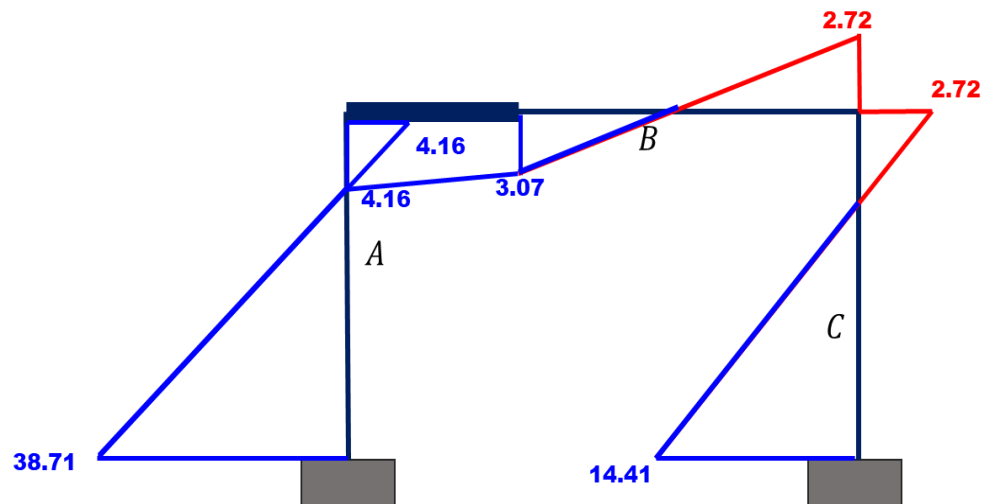


Figura 9
Diagrama de momento flector (DMF).



2.2.8. Rigidez lateral

$$K_{LAT} = \frac{F}{D}$$

En donde:

- F: Estará en función a la carga externa de la estructura.
- D: Estará en función al resultado en el vector de deformación en el lugar que se encuentre el grado de libertad que es desplazamiento.

$$K_{LAT} = \frac{20}{4.89313}$$

$$K_{LAT} = 4.0874 EI$$

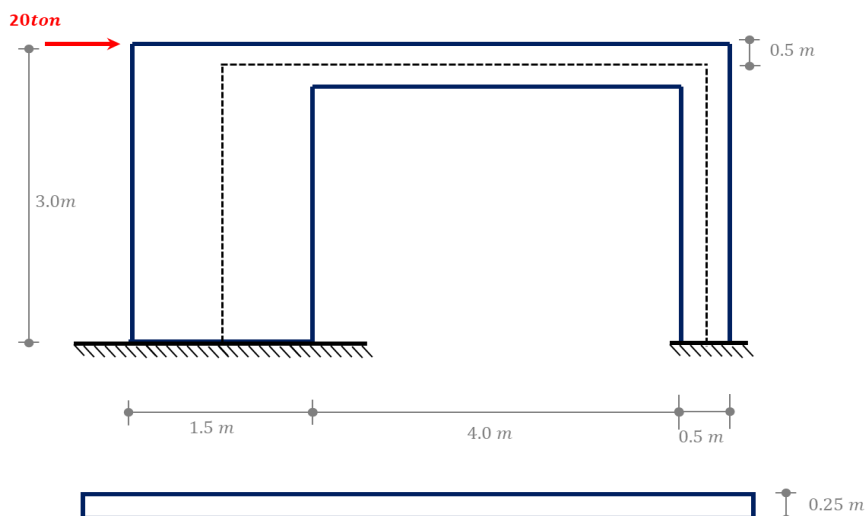
2.2.9. Vector de deformaciones

$$[D] = [K]^{-1} \cdot [Q]$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 4.89313 \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix}$$

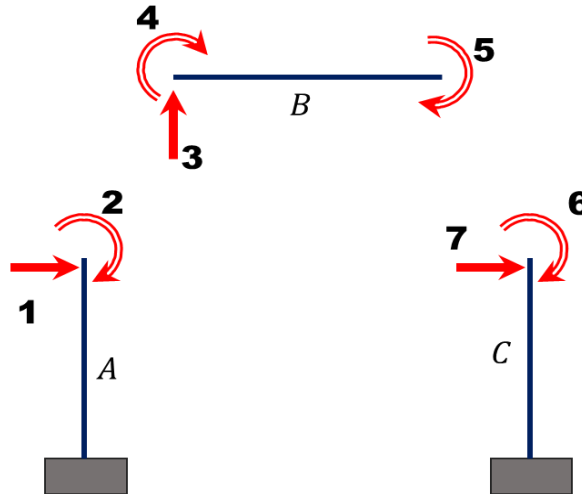
2.2.10. Deformación por corte en todos los elementos E. Placa – columna – viga

Figura 10
Estructura con brazo rígido en pórtico.



2.2.11. Sistema q-d

Figura 11
Sistema q-d.



2.2.12. Matriz de rigidez para cada barra

Tenemos:

2.2.12.1. Placa

$$[K] = \begin{bmatrix} 4 + \alpha & 2 - \alpha \\ 2 - \alpha & 4 + \alpha \end{bmatrix} \frac{27EI}{L(1+\alpha)} \quad ; \quad \alpha = \frac{12EI}{GA'L^2} ; A' = \frac{b(h)}{1.2} ; \frac{E}{G} = 2.3$$

$$\alpha = \frac{12EI}{GA'L^2} = 12 * \frac{E}{G} * \frac{I}{A'} * \frac{1}{L^2}$$

$$\alpha = 12 * \frac{23}{10} * \frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{b(h)}{1.2}} * \frac{1}{L^2}$$

$$\alpha = 12 * \frac{23}{10} * \frac{1.2 h^2}{12} * \frac{1}{L^2} = 12 * \frac{23}{10} * \frac{1.2 (1.5)^2}{12} * \frac{1}{(3)^2}$$

$$\alpha = 0.69$$

$$[K_A] = \begin{bmatrix} 7.1 & -10.6509 \\ -10.6509 & 24.9763 \end{bmatrix} EI$$

2.2.12.2. Viga

$$[K_B] = \begin{bmatrix} 4 + \alpha & 2 - \alpha \\ 2 - \alpha & 4 + \alpha \end{bmatrix} \frac{EI}{L(1+\alpha)} \quad ; \quad \alpha = \frac{12EI}{GA'L^2} ; A' = \frac{b(h)}{1.2} ; \frac{E}{G} = 2.3$$

$$\alpha = \frac{12EI}{GA'L^2} = 12 * \frac{E}{G} * \frac{I}{A'} * \frac{1}{L^2}$$

$$\alpha = 12 * \frac{23}{10} * \frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{b(h)}{1.2}} * \frac{1}{L^2}$$

$$\alpha = 12 * \frac{23}{10} * \frac{1.2 h^2}{12} * \frac{1}{L^2} = 12 * \frac{23}{10} * \frac{1.2 (0.5)^2}{12} * \frac{1}{(4)^2}$$

$$\alpha = 69/1600$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 0.96899 & 0.46899 \\ 0.46899 & 0.96899 \end{bmatrix}$$

$$[K'] = \begin{bmatrix} 0.96899 & 0.46899 & -0.359495 & -0.359495 \\ 0.46899 & 0.96899 & -0.359495 & -0.359495 \\ -0.359495 & -0.359495 & 0.179748 & 0.179748 \\ -0.359495 & -0.359495 & 0.179748 & 0.179748 \end{bmatrix}$$

$$[K_B] = \begin{bmatrix} 0.96899 & 0.46899 & -0.359495 \\ 0.46899 & 0.96899 & -0.359495 \\ -0.359495 & -0.359495 & 0.179748 \end{bmatrix} EI$$

Figura 12
Análisis de deformación de la barra.

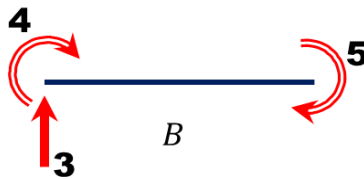
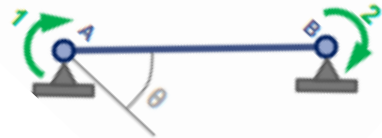


Figura 13
Análisis de deformación de la barra.



2.2.12.3. Columna

$$[K] = \begin{bmatrix} 4 + \alpha & 2 - \alpha \\ 2 - \alpha & 4 + \alpha \end{bmatrix} \frac{EI}{L(1+\alpha)} \quad ; \quad \alpha = \frac{12 EI}{GA'L^2} \quad ; \quad A' = \frac{b(h)}{1.2} \quad ; \quad \frac{E}{G} = 2.3$$

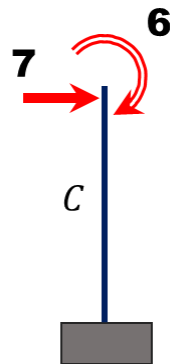
$$\alpha = \frac{12 EI}{GA'L^2} = 12 * \frac{E}{G} * \frac{I}{A'} * \frac{1}{L^2}$$

$$\alpha = 12 * \frac{23}{10} * \frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{b(h)}{1.2}} * \frac{1}{L^2}$$

$$\alpha = 12 * \frac{23}{10} * \frac{1.2 h^2}{12} * \frac{1}{L^2} = 12 * \frac{23}{10} * \frac{1.2 (0.5)^2}{12} * \frac{1}{3^2}$$

$$\alpha = 23/300$$

Figura 13
Análisis de momentos en la barra.



$$[K] = \begin{bmatrix} 1.2621 & 0.5955 \\ 0.5955 & 1.2621 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 1.2621 & 0.5955 & -0.6192 \\ 0.5955 & 1.2621 & -0.6192 \\ -0.6192 & -0.6192 & 0.4128 \end{bmatrix}$$

$$[K_C] = \begin{bmatrix} 1.2621 & -0.6192 \\ -0.6192 & 0.4128 \end{bmatrix}$$

2.2.13. La matriz de rigidez para cada barra:

$$[K_A] = \begin{bmatrix} 7.1 & -10.6509 \\ -10.6509 & 24.9763 \end{bmatrix} EI$$

$$[K_B] = \begin{bmatrix} 0.96899 & 0.46899 & -0.359495 \\ 0.46899 & 0.96899 & -0.359495 \\ -0.359495 & -0.359495 & 0.179748 \end{bmatrix} EI$$

$$[K_C] = \begin{bmatrix} 1.2621 & -0.6192 \\ -0.6192 & 0.4128 \end{bmatrix} EI$$

2.2.14. Matriz de rigidez del sistema

$$[K] = \begin{bmatrix} 7.5128 & -10.6509 & -0.6192 \\ -10.6509 & 25.7869 & -0.0899 \\ -0.6192 & -0.0899 & 1.4419 \end{bmatrix}$$

2.2.15. Vector de carga

$$[Q] = \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. RESULTADOS

3.1. Vector de deformaciones

El vector de deformación constituye una expresión matemática que caracteriza las alteraciones sufridas por un material o estructura al enfrentarse a fuerzas o cargas externas. En líneas generales, este vector se interpreta como una indicación de cómo los puntos específicos de un objeto experimentan desplazamientos y

deformaciones en comparación con su condición inicial.

El vector de deformaciones es esencial en el análisis estructural para evaluar el comportamiento de la estructura ante diferentes condiciones de carga. Se utiliza en conjunto con la matriz de rigidez y el vector de fuerzas para resolver ecuaciones de equilibrio y determinar la respuesta completa del sistema.

$$[D] = [K]^{-1} \cdot [Q]$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 7.5128 & -10.6509 & -0.6192 \\ -10.6509 & 25.7869 & -0.0899 \\ -0.6192 & -0.0899 & 1.4419 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.10536 \\ 2.94604 \\ 3.23502 \end{bmatrix}$$

$$[d_1] = [A_i] \cdot [D]$$

$$[d_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7.10536 \\ 2.94604 \\ 3.23502 \end{bmatrix} \quad \therefore [d_1] = \begin{bmatrix} 7.10536 \\ 2.94604 \end{bmatrix}$$

$$[d_2] = \begin{bmatrix} 0 & -0.75 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7.10536 \\ 2.94604 \\ 3.23502 \end{bmatrix} \quad \therefore [d_2] = \begin{bmatrix} -2.20953 \\ 2.94604 \\ 3.23502 \end{bmatrix}$$

$$[d_3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7.10536 \\ 2.94604 \\ 3.23502 \end{bmatrix} \quad \therefore [d_3] = \begin{bmatrix} 3.23502 \\ 7.10536 \end{bmatrix}$$

3.2. Fuerzas internas

Las fuerzas internas en una estructura se refieren a las fuerzas que actúan dentro de los elementos individuales de la estructura en respuesta a las cargas externas aplicadas. Estas fuerzas internas son esenciales para comprender cómo se distribuyen las tensiones y deformaciones a lo largo de los diferentes componentes de la estructura. Estas fuerzas internas son el resultado de las interacciones entre los elementos estructurales y son cruciales para diseñar

estructuras que sean capaces de resistir las cargas externas de manera eficiente y segura. Los ingenieros estructurales utilizan métodos como el método de rigidez sistematizado o el método de elementos finitos para analizar y calcular estas fuerzas internas en una estructura, lo que les permite diseñar estructuras que cumplan con los criterios de seguridad y rendimiento requeridos.

$$[q_i] = [k_i] \cdot [d_i]$$

$$[q_1] = \begin{bmatrix} 19.07 \\ -2.10 \end{bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix} \quad [q_2] = \begin{bmatrix} -1.92 \\ 0.66 \\ 0.32 \end{bmatrix} \begin{matrix} (3) \\ (4) \\ (5) \end{matrix} \quad [q_3] = \begin{bmatrix} -0.32 \\ 0.93 \end{bmatrix} \begin{matrix} (6) \\ (7) \end{matrix}$$

Figura 14
Sistema q-d, grados de libertad local.

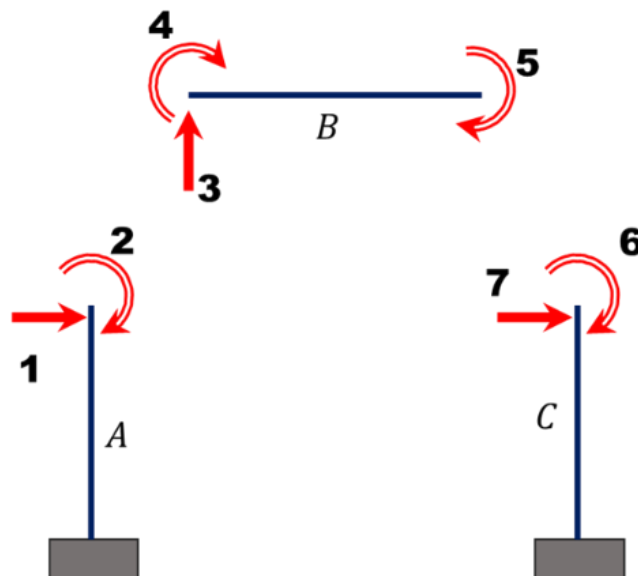


Figura 15
Análisis del diagrama de momento flector.

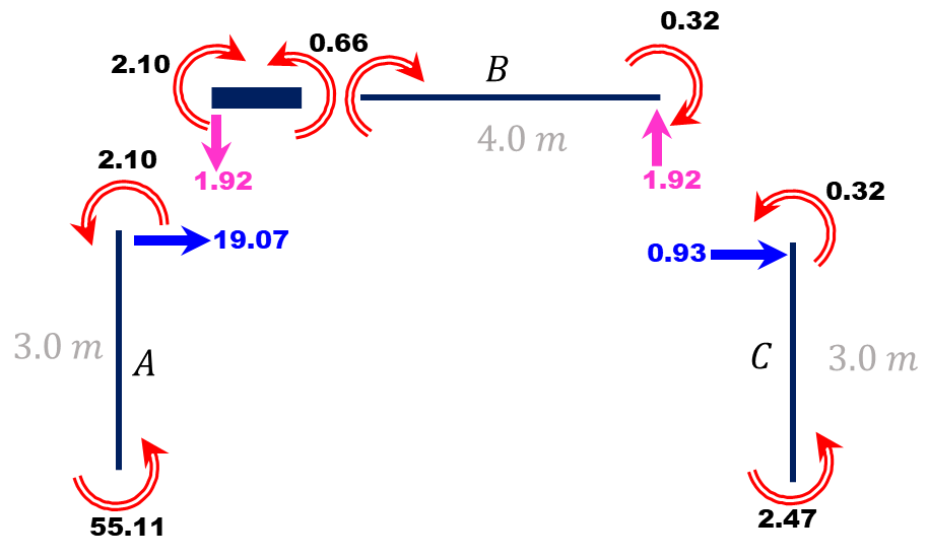
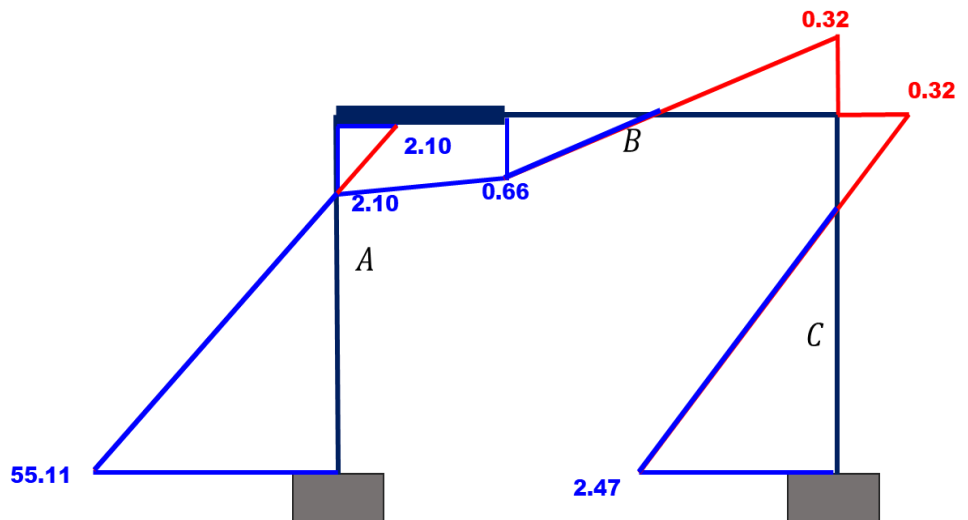


Figura 16
Diagrama de momento flector (DMF).



3.3. RIGIDEZ LATERAL

La rigidez lateral se refiere a la capacidad de una estructura para resistir desplazamientos laterales o deformaciones debidas a fuerzas horizontales aplicadas, como las producidas por vientos, sismos u otras cargas laterales. En esencia, la rigidez lateral mide la resistencia de una estructura a moverse lateralmente en respuesta a fuerzas laterales externas.

La rigidez lateral está relacionada con la capacidad de la estructura para mantener su forma y estabilidad frente a estas fuerzas laterales. Cuanto mayor sea la rigidez lateral de una estructura, menor será su desplazamiento lateral bajo la influencia de las cargas laterales, lo que contribuye a una mayor estabilidad y resistencia sísmica.

$$K_{LAT} = \frac{F}{D}$$

$$K_{LAT} = \frac{20}{7.10536}$$

$$K_{LAT} = 2.81478 EI$$

3.4. Vector de deformaciones

El vector de deformaciones es una representación matemática que describe las deformaciones experimentadas por un material o una estructura cuando se somete a fuerzas o cargas externas. Este vector captura cómo cambian las dimensiones y formas del material debido a la aplicación de fuerzas, permitiendo evaluar la respuesta de la estructura a dichas cargas.

En el análisis estructural, el vector de deformaciones se utiliza para cuantificar las

variaciones en los desplazamientos y deformaciones de los puntos individuales de una estructura. Se expresa en términos de cambios relativos en las coordenadas de los nodos o puntos de interés de la estructura. Este vector puede incluir componentes que representen desplazamientos lineales, deformaciones angulares y otras formas de deformación.

$$[D] = [K]^{-1} \cdot [Q]$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 7.10536 \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix}$$

4. DISCUSIÓN

(HIBBELER, 2012) Se indica que, al calcular la matriz de rigidez para cualquier elemento, es esencial que esté completamente alineada con sus coordenadas globales. Esto implica considerar los desplazamientos en las coordenadas "X" y "Y" y tener en cuenta el número de grados de libertad por cada nodo, que en este caso son dos, dando como resultado una matriz de rigidez cuadrada de dimensiones 4x4. Este concepto se alinea con la información encontrada en el libro revisado. En resumen, se ha generado una matriz de rigidez para cada elemento, basada en sus coordenadas globales, y todas estas matrices son cuadradas con igual número de filas y columnas.

(Blanco, 2015) menciona que lo que se puede justificarse mediante los grados de libertad es su capacidad para determinar los desplazamientos y rotaciones en una estructura, especialmente al iniciar desde un punto nodal, aplicándose a cualquier armadura plana en 2D. La cantidad de grados de libertad se vincula directamente con el número de nodos; para apoyos simples, se asigna un grado de libertad, mientras que para apoyos fijos no se considera ningún grado de libertad. Este enfoque se ha aplicado de manera coherente en nuestro trabajo, donde se ha tenido en cuenta el número adecuado de grados de libertad, dependiendo de si se trata de apoyos fijos o simples.

5. CONCLUSIÓN

El método de rigidez sistematizado es una técnica comúnmente utilizada para analizar estructuras, como los pórticos con brazos rígidos. Algunas conclusiones clave al aplicar este método a este tipo de estructuras podrían incluir: Determinación de fuerzas y desplazamientos: El método de rigidez sistematizado permite calcular tanto las fuerzas internas como los desplazamientos en cada miembro de un pórtico con brazos rígidos. Análisis de rigidez: Proporciona una comprensión detallada de la rigidez relativa de los elementos dentro del pórtico. Menciona (Falconi, 2014), que esto es fundamental para entender cómo se distribuyen las cargas y cómo responde la estructura a las fuerzas aplicadas.

Identificación de momentos y reacciones: Permite calcular los momentos en las columnas, vigas y conexiones, así como las reacciones en los apoyos, lo que es esencial para el diseño

estructural y la seguridad de la construcción. Sensibilidad a cambios: El método también muestra cómo la estructura responde a cambios en las condiciones de carga, geometría o propiedades de los materiales. Esto es crucial para evaluar la estabilidad y la capacidad de la estructura para resistir diferentes escenarios. Optimización del diseño: Al comprender mejor la distribución de fuerzas y momentos, este método puede ayudar a optimizar el diseño de los pórticos con brazos rígidos, minimizando el material utilizado sin comprometer la integridad estructural. En resumen, el método de rigidez sistematizado es una herramienta poderosa para el análisis de pórticos con brazos rígidos, permitiendo entender en detalle su comportamiento bajo cargas específicas y facilitando el diseño y la optimización de dichas estructuras.

6. REFERENCIA BIBLIOGRÁFICA

- Blanco, E. C. (2015). *Análisis matricial de estructuras*.
- Falconi, R. A. (2014). *Análisis Matricial de Estructuras*. Ecuador: Frontier Publicidad.
- Godíño Poma, F. L. (2017). *Análisis Estructural I. Métodos Energético y Matricial con Aplicaciones Mathcad*. Huancayo: Impresos S.R.L.
- Hibbeler. (2012). *Análisis estructural*. En *hibbeler, análisis estructural*. México: : Pearson.
- Martin, P. R. (2016). *Brazo Rígido*. WIX. Obtenido de <https://gamart94.wixsite.com/estructuras/modelamiento>.
- Ottazzi Pasino, G. (2014). *Apuntes del curso Análisis Estructural I*.
- Rupay Vargas, M. G. (2018). *Estructuración y diseño sísmico de edificaciones*. . En M. J. Rupay Vargas, *Estructuración y diseño sísmico de edificaciones*. . Huancayo
- Rupay Vargas, M. J. (2020). *Apuntes Análisis Estructural II: Metodo directo de la Rigidez en Armaduras*. En M. J. Rupay Vargas. *Chanchamayo: Universidad Nacional Intercultural de la Selva Central Juan Santos Atahualpa*.
- Vargas, R. (2022). *Apuntes Análisis Estructural II: Análisis Sísmico Estático*. . La Merced: sn.
- Zazueta Villaseñor, J. H. (2009). *Método de la rigidez para armaduras planas*. (Instituto tecnológico de Sonora ed.). Instituto tecnológico de Sonora.