

## Artículo original

# Conexiones de la matemática y la biología en una tarea de modelación matemática mediado por GeoGebra

## Mathematical Modelling of Biological Phenomena: A GeoGebra-Supported Study

Laura Jannet Chablé Álvarez <sup>1, a</sup>

Flor Isabel Carrillo Lara <sup>2, b</sup>

<sup>1</sup> Centro de Bachillerato Tecnológico Industrial y de Servicios No. 10, México

<sup>a</sup> ORCID: <https://orcid.org/0009-0007-3001-0823>

[jannet1609@gmail.com](mailto:jannet1609@gmail.com)

<sup>2</sup> Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas, Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú

<sup>b</sup> ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4181-3513>

[f.carrillo@pucp.edu.pe](mailto:f.carrillo@pucp.edu.pe)

### Información

Recibido: 12 de setiembre del 2025.

Aceptado: 29 de noviembre del 2025.

### Palabras clave:

Modelación matemática, Biología, GeoGebra.

### Resumen

Esta comunicación tiene como objetivo analizar conexiones entre la matemática y la biología cuando resuelven una tarea de modelación matemática mediado por GeoGebra. El análisis de los datos se realiza desde una perspectiva cognitiva, y algunos resultados muestran que los conocimientos previos de los estudiantes favorecen la construcción de representaciones mentales, fortaleciendo así el proceso de modelado de la situación real. Además, el rol que juega la tecnología refuerza las etapas de la modelación matemática, el cual les permite desarrollar competencias para relacionar las aplicaciones de modelos geométricos con el comportamiento de los glóbulos blancos en una herida, dejando evidencia que no es suficiente la definición de objeto matemático si no que la visualización contribuye a su aprendizaje.

### Information

#### Keywords:

Mathematical modeling, Biology, GeoGebra.

### Abstract

This paper aims to analyze connections between mathematics and biology when solving a mathematical modeling task mediated by GeoGebra. The data analysis is carried out from a cognitive perspective, and some results show that students' prior knowledge favors the construction of mental representations, thus strengthening the modeling process of the real situation. In addition, the role played by technology reinforces the stages of mathematical modeling, which allows students to develop competencies to relate the applications of geometric models to the behavior of white blood cells in a wound, providing evidence that the definition of a mathematical object is not enough, but that visualization contributes to its learning.

## INTRODUCCIÓN

Esta comunicación muestra que el aprendizaje y la enseñanza de la matemática se puede alcanzar por medio de la modelación matemática, a su vez, esta experiencia es una evidencia de la existencia de la relación de la matemática con situaciones reales.

Existen grupos de investigadores que definen la modelación matemática como un proceso que relaciona situaciones de la vida y la matemática (Pollak, 1968; Kaiser-Meßmer, 1986, Blum y Niss, 1991), asimismo, el proceso de modelación estudia o propone un modelo matemático (Niss y Blum, 2020). Otro aspecto del proceso, es identificar etapas o fases que llevan a determinar un modelo matemático, conocido como ciclos de la modelación (Borromeo-Ferri, 2006, 2007).

Kaiser et al., (2006) mencionan que existen distintos intereses para emplear los procesos de modelación mediante ciclos; los modelos propuestos tengan relevancia para su aplicación, identificar qué competencias de modelado se pueden desarrollar, atender las dificultades que enfrentan los estudiantes durante la resolución de una tarea matemática, el uso de las herramientas tecnológicas que sirven de

apoyo para la resolución de un problema, también la utilidad presente de la enseñanza de la matemática y, finalmente, forme parte de un diseño curricular.

En ese sentido, el presente escrito retoma el interés en analizar el aprendizaje de las matemáticas considerando modelos matemáticos que tenga un estrecha relación con la Biología, tomando en consideración que proponer tareas de modelación permiten al estudiante desarrollar competencias de aprendizaje (Borromeo-Ferri, 2018), también, que durante el proceso de modelación el estudiante determina e interpreta los elementos que compone un modelo matemático que representa situaciones de la vida cotidiana (Niss y Højgaard, 2011).

La literatura señala que la tecnología está tomando relevancia en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En el proceso de la modelación matemática el uso de la tecnología sirve para experimentar, simular, visualizar y calcular tareas o actividades de modelización (Blum, 2015). Greefrath (2011) estima que el uso de herramientas tecnológicas se emplea para comprender el problema real y se transforme a un lenguaje matemático, la transformación que expresa se puede lograr mediante ciclos o fases de modelación, debido a que emplear los recursos tecnológicos permite simplificar, relacionar, visualizar y validar los datos del problema real a un modelo matemático. Por su parte, Molina-Toro et al. (2019) señala que existen roles de la tecnología durante el proceso de modelación; sirve como herramienta usándose de diferentes maneras en la resolución de fenómenos, permite reorganizar los avances de cualquier conocimiento.

En particular, el proceso de modelación, Greefrath (2011) externa que la presencia de un ciclo de modelación ofrece recursos para explicar las etapas o fases del proceso, en ese sentido, el uso de la tecnología brinda soporte para comprender el problema y sea proyectado a un lenguaje matemático porque simplifica y visualiza, en concreto la asignación de tareas digitales permite al estudiante simule o manipule posibles soluciones. De la misma forma, la tecnología se emplea para construir representaciones matemáticas que provienen de las ideas del estudiante, planificar los procedimientos, construir modelos matemáticos y validar las posibles soluciones de cualquier tarea de modelación (Daher y Shahbari, 2013).

Por lo anterior, el uso de la tecnología es un andamio para relacionar la matemática con situaciones de la vida diaria, en específico, desarrollar competencias para resolver tarea que involucren el aprendizaje de distintos contenidos matemáticos. Esta comunicación describe aspectos de modelación que se observaron en el trabajo multidisciplinario entre la matemática y la biología, donde el rol que juega el software GeoGebra fue el de construir, interpretar y visualizar el comportamiento de glóbulos blancos en el cuerpo humano.

La propuesta de este trabajo multidisciplinario proviene de algunas problemáticas encontradas en la literatura. Distintas investigaciones educativas atribuyen que hay diferentes dificultades para comprender las Matemáticas. Abrate, et al., (2006) expresan que los estudiantes no reflexionan sobre las tareas y problemas matemáticos que se les plantea, no indagan sobre datos y estrategias que los lleve a la resolución de tareas.

Por su parte, Melgarejo et al. (2019) señala que para aprender matemática y específicamente en Geometría no se observa avances en los procesos de razonamiento geométrico y en sus aplicaciones. Asimismo, Sáenz et al. (2017) señala que los estudiantes enfrentan dificultades en las competencias de pensamiento geométrico, esto se debe a que no logran interpretar y relacionar modelos gráficos con situaciones cotidianas, sugiriendo que hay una necesidad de emplear estrategias para comprender los diversos conceptos de Geometría.

Respecto al dominio de la Geometría, existen investigaciones que atienden las dificultades que emergen en los estudiantes, Grando-Ortiz y Padilla-Escoria (2020), y Pérez (2012) mencionan que mediante la modelación el estudiante desarrolla competencias para el aprendizaje de cónicas, dado que potencializa la comprensión de este tema, y el uso de un software permite acompañar el procedimiento de visualización, construcción y de vistas algebraicas, así como la modelación de cónicas potencializa el pensamiento geométrico con el uso de GeoGebra.

Por su parte, Krekic & Namestovski (2009) proponen que la simulación simbólica realizadas en computadoras ofrecen un análisis y comportamientos de fenómenos, emplear simulación juega un rol

inductivo o deductivo porque se visualiza. En particular, Buteau (2016) emplea la idea de simulación en tiempo real, en la cual analiza la epidemia de células autómata, identifica las consecuencias de la evolución de ellas, y propone el modelo del costo para tratar la inmunización para combatir la epidemia.

Debido a las dificultades reportadas y la importancia de promover el pensamiento geométrico mediante la modelación matemática en los antecedentes, este reporte de investigación tiene por objetivo: analizar conexiones entre la matemática y la biología cuando resuelven una tarea de modelación matemática con GeoGebra.

## MATERIAL Y MÉTODOS

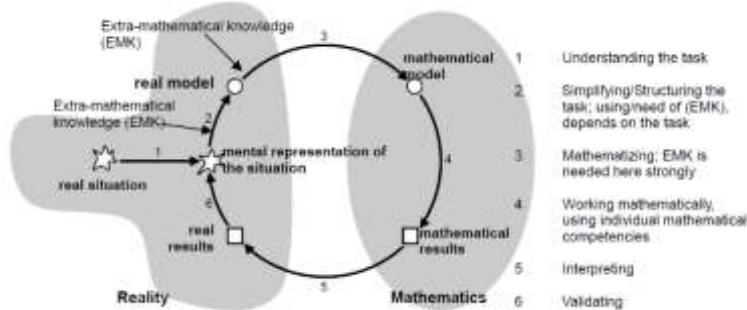
Con estudios empíricos, la investigación de Borromeo-Ferri (2018) ha aportado de manera eficaz el aprender y enseñar matemática, a saber, la modelización matemática, la autora lo describe como el camino para relacionar la matemática y la realidad/situaciones reales.

Asimismo, en el proceso de modelación están presente ciclos de modelación matemática, un aspecto relevante del ciclo de modelación es que puede existir linealidad o no, es decir, se avanza y/o se retroceder para modelar la relación de la realidad y la matemática (Borromeo-Ferri, 2018).

El ciclo de modelación desde una perspectiva cognitiva (Borromeo, 2006, 2007). A continuación, se describen las etapas/fases presentes en el proceso de la modelación, Figura 1: Situación Real: presentar el problema, el cual se puede describir con una figura o un texto. Después, el individuo trata de comprender el problema apropiándose de una Representación Mental de la Situación: dependerá del tipo de pensamiento matemático y/o experiencia que posea el estudiante permitirá que la situación problema sea simplificada, en paralelo, se inicie el proceso de modelado. Con las dos etapas anteriores, los conocimientos extramatemáticos que posee el estudiante produce un modelo real de la situación real, esto es un intento de expresar esos conocimientos previos de las matemáticas guardados y ahora son llevados para proponer una solución al problema en contexto. En consecuencia, el individuo propone un Modelo matemático, la formalidad que exige la matemática, lo que es lo mismo, proponer un modelo que involucre fórmulas, variables, parámetros, entre otros. En las siguientes etapas, el individuo trabaja con los resultados que surgen del modelo matemático propuesto, llamado los resultados matemáticos. Seguido por la interpretación de resultados a partir del modelo matemático, finalizando, con la validación de los resultados matemáticos en la situación problema (Borromeo, 2006, 2007).

**Figura 1**

*Ciclos de modelación*



Borromeo, 2006.

## Metodología

La Universidad de Guadalajara (UdG), México, la educación preuniversitaria trabaja con un diseño curricular llamado Bachillerato General por Competencias. La unidad de aprendizaje, Matemática y ciencia II, está diseñado para que los estudiantes desarrollen competencias disciplinares y extendidas, con la finalidad de construir e interpretar modelos matemáticos mediante procedimientos geométricos y variacionales para comprender situaciones reales. Estas competencias se promueven al desarrollar los temas de elementos de geometría analítica y cónicas (Universidad de Guadalajara, 2025).

Con lo anterior, para evaluar los contenidos de elementos de geometría analítica y cónicas, se planteó trabajar de manera multidisciplinaria, en este caso Matemática y Biología. En el contexto de la Biología se consideró representar las características y el trabajo que realizan la célula en la sangre. En la médula ósea se producen los tipos de glóbulos sanguíneos, en particular, los glóbulos blancos están en el sistema inmunitario del cuerpo, los cuales combaten infecciones y enfermedades, también son llamados granulocitos (neutrófilos, eosinófilos y basófilos), los monocitos y los linfocitos (Instituto nacional de cáncer, s.f.). En el trabajo que desarrollaron los alumnos fueron considerando los basófilos.

El trabajo se desarrolló con estudiantes de 4to. semestre de educación preuniversitaria (16 a 17 años). El objetivo de la tarea fue construir e interpretar la relación existente entre representaciones geométricas con situaciones reales, en particular, simular la función que ejercen los basófilos en una herida en la piel. Los objetos matemáticos presentes en el desarrollo de la tarea de modelación son: esfera, circunferencia, parábola, plano, cilindro. La construcción fue realizada usando el Software GeoGebra.

La situación es considerada bajo el proceso de modelación con el enfoque cognitivo de Borromeo-Ferri (2018). Para el desarrollo de esta situación la profesora a cargo del grupo organizó un equipo de tres estudiantes. Durante dos semanas los estudiantes trabajaron en equipo para construir una representación de glóbulos blancos.

## RESULTADOS

A continuación, se describe las etapas que se llevaron a la representación de los Basófilos y su construcción con algunas cónicas.

**Tabla 1**

*Etapas del proceso para modelar las características de los Basófilos.*

Etapas	Descripción/ procesos
Comprender la tarea (1)	Los estudiantes externaron sus conocimientos acerca del sistema inmunitario: por ejemplo, cuando el cuerpo descubre una sustancia extraña, varios tipos de células entran en acción (llamado respuesta inmune), las cuales protegen al cuerpo de sustancias extrañas, virus y bacterias. Además, previamente en su clase de Biología estudiaron tipo de célula: Neutrófilos, Eosinófilos, Basófilos, Linfocitos y Monocitos. En particular, tuvo lugar una discusión entre los estudiantes para la selección de las células, mediante ensayo y error elaborar las representaciones en GeoGebra. Finalmente, los estudiantes se centraron en los Basófilos, el cual se encarga de aumentar la circulación de la sangre para la cicatrización de una herida.
Simplificar la tarea (2)	Identificaron y discutieron entre las vistas graficas ( $R^2$ o $R^3$ ) de GeoGebra les ayudaría a crear el prototipo que simula el Basófilo. Esta etapa tuvo varias versiones previas del prototipo. Crearon cilindros, esferas y planos en la vista $R^3$ en GeoGebra y deslizadores.
	De los conocimientos previos, decidieron representar y simular el proceso de cicatrización de una herida en la piel del cuerpo humano.
Matematizar (3)	Identificaron que las esferas representarían los glóbulos blancos, dentro de una esfera se desprende otro tipo de glóbulo (color azul). Elaboraron un cilindro (representa la vena) considerando los radios de las esferas, el diámetro del cilindro fue una condición para simular la circulación de los glóbulos.
Trabajando con matemáticas (4)	En la vista $R^2$ realizaron un prototipo para que los objetos matemáticos se movieran y realizaron el comportamiento de los glóbulos, para esto emplearon ecuaciones de la circunferencia, ecuación de parábola, calcular diámetros de las esferas, radio de las distintas esferas, colocar condicionales en el GeoGebra (emplearon contenidos de programación). Por otro lado, construyeron dos planos, que representan la piel y la

- herida, calcularon la distancia entre plano rojo (herida) y el diámetro de la esfera azul (Basófilo).
- Interpretar (5) Emplearon el cilindro para simular el recorrido de los glóbulos blancos, cuando se desprende otro glóbulo azul es el que hace el trabajo de cicatrizar la herida. Con esta simulación se cumple las funciones de los basófilos.
- Validar (6) El uso de los deslizadores es relevante porque permite la animación del prototipo de la cicatrización de una herida.

## DISCUSIÓN

A continuación, se describe los resultados obtenidos durante el desarrollo de la construcción de la representación de glóbulos blancos (Figura 2) considerando el modelo cognitivo de Borromeo-Ferri (2006).

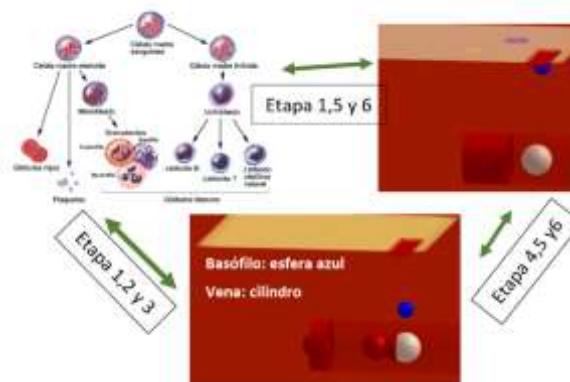
La situación real presente en el proceso de modelación (etapa 1): El conocimiento previo del tema de tipos de células, las ideas de qué tipo de glóbulos blancos son los que trabajan más en el sistema inmune del cuerpo, debido a las constante de accidentes leves en la piel, la elección de representar/simular una herida en la piel era la adecuada. Este proceso de modelación distingue una situación real (Borromeo, 2006, 2007), debido a la importancia que tiene el cuerpo humano, a su vez, que el software GeoGebra les ofrece visualizar las características y el comportamiento de los glóbulos blancos.

Representaciones mentales en el proceso de modelación para simular el recorrido de los basófilos (etapa 2). Las aportaciones cognitivas de cada estudiante son consideradas representaciones mentales. Borromeo-Ferri (2018) determina que en esta etapa el estudiante asocia el problema real con una solución, esto lo podemos observar cuando los estudiantes emplearon GeoGebra para simular sus representaciones mentales, es decir, usar esferas para representar los glóbulos blancos y morados. En paralelo, un cilindro donde deberían circular los glóbulos, un plano para representar la piel, y considerar el camino que debería recorrer el glóbulo apoyándose de una parábola.

Modelo real durante el proceso de modelación (etapa 3). Partiendo de las representaciones mentales de cada objeto matemático ahora tiene que ejercer una acción, de acuerdo con Borromeo-Ferri (2018), un modelo real simplifica y estructura las representaciones mentales previas. Los glóbulos blancos tenían que circular dentro del cilindro para eso emplearon condiciones para aparecer en un determinado parámetro. El recorrido de un glóbulo azul hacia la herida (plano) una vez que llega la herida cicatriza, a saber, la función parábola también necesito de condiciones y parámetros.

**Figura 2**

*Etapas del proceso de modelación.*



Conocimiento extramatemático (etapa 3 y 4). Esta etapa parte de la experiencia que tenga el estudiante (Borromeo-Ferri, 2018), el aporte de un estudiante que tiene conocimientos de programación aporto en el dinamismo de los glóbulos blancos y azules dado que empleó condicionales y agregó casillas para cada objeto matemáticos.

Interpretación de los basófilos para cura una herida (etapa 5 y 6): el prototipo de un cilindro simulando el lugar donde están los basófilos, cuando se detecta una herida en la piel los basófilos desprenden una esfera azul la cual hace el recorrido a través de una parábola para llegar a zona afectada (herida). Asimismo, en esta etapa los estudiantes muestran cómo trabajan las células y repiten el procedimiento para validar la construcción y representación de los basófilos.

### Conclusiones

Con este trabajo multidisciplinario se muestra aspectos del proceso de modelación, así como la importancia de las etapas del ciclo de modelación para construir el comportamiento y la función que tiene los glóbulos blancos en el cuerpo humano.

En principio, en la tarea de modelación realizada por los estudiantes se evidencia que los ciclos de modelación no se comportaron de manera lineal, en este caso, hay una estrecha vinculación entre la situación real y las representaciones mentales, debido a que las ideas generaban representaciones mentales instantáneas e inmediatamente era importante seleccionar la vista gráfica ( $R^2$  y  $R^3$ ), según la pertinencia para construir una representación geométrica que modela la situación real, la cicatrización de la herida. Cabe señalar que durante la construcción de las representaciones las etapas 1,2 y 3 se repitieron, dejando evidencia que estas etapas se interceptan.

Seguidamente, en las etapas 3 y 4, donde los estudiantes trabajaron con conceptos matemáticos, la tecnología realizó el rol de herramienta para la construcción (comportamiento y características de las células), además, se empleó para dar movimiento a los cuerpos geométricos, dejando en claro que su rol fue representar el fenómeno. De esto se obtiene que el software GeoGebra tuvo el rol de reorganizar y ajustar los modelos geométricos para visualizar el trabajo que hacen los glóbulos blancos cuando detectan una herida. Se puede señalar que la construcción de distintos modelos geométricos forma parte de la visualización y explicación de la definición de los glóbulos blancos (basófilos).

Si bien es un reto trabajar con la tecnología porque siempre hay detalles por definir y mejorar, los estudiantes confrontaron sus dificultades por medio de ensayo y error. Durante el desarrollo de las etapas se observaron que los intereses personales y conocimientos previos de los estudiantes aportaron tanto en superar las dificultades como en la construcción de los modelos geométricos. La propuesta de relacionar Matemática y Biología superó la idea de aprender solo con lápiz y papel, donde la tecnología tuvo un rol importante en el aprendizaje de los objetos matemáticos. Además, contribuye de manera significativa a superar las dificultades cognitivas, y proponer soluciones creativas y motivadoras. Finalmente, se evidencia que los estudiantes incrementaron y fortalecieron sus competencias respecto a las representaciones geométricas, y la visualización dinámica aportó a su aprendizaje.

### REFERENCIAS

- Abrate, R., Pochulu, M. y Vargas, J. (2006). *Errores y dificultades en matemática análisis de causas y sugerencia de trabajo*. Universidad Nacional de Villa María
- Blum, W & Niss, M (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects- State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational studies in Mathematics*, 22, 37-68
- Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM*, 28 (2), 86-95.
- Borromeo Ferri, R. (2007). Modelling problems from a cognitive perspective. *Mathematical modelling, ICTMA*, 12, 260-270.
- Borromeo, R. (2018). *Modelling Mathematical*. Springer
- Blum, W., (2015). Quality teaching of mathematical modelling; What do we know, what can we do? En S. Cho (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 73-96). Springer.

- Buteau, C., Muller, E., Marshal, N., Sacristán, A. y Mgombelo, J. (2016). Undergraduate mathematics students appropriating programming as a toll for modelling, simulation, and visualization: a case study. *Digit Exp Math Educ* 2, 142–166. DOI 10.1007/s40751-016-0017-5
- Daher, W. & Shahbari, J. (2013). Pre-service teachers' modelling processes through engagement with model eliciting activities with a technological tool. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 1, 1-22.
- Feudel, F. y Biehler, R. (2021). Students' Understanding of the Derivative Concept in the Context of Mathematics for Economics. *Journal Fur Mathematik-Didaktik*, 42(1), 273–305. <https://doi.org/10.1007/s13138-020-00174-z>
- Grando-Ortiz, C. y Padilla-Escoria, I. (2020). El aprendizaje gráfico de la recta tangente a través de la modelación de las secciones cónicas utilizando Geogebra. *Revista Científica*, 40 (1), 118-132. <https://doi.org/10.14483/23448350.16137>
- Greefrath, G. (2011). Using technologies: New possibilities of teaching and learning modelling—Overview. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo-Ferri, & G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (pp. 301–304). Dordrecht: Springer. [https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2\\_30](https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_30)
- Instituto Nacional de Cáncer (s. f.). Glóbulo blanco. <https://www.cancer.gov/espanol/publicaciones/diccionarios/diccionario-cancer/def/globulo-blanco>
- Kaiser-Meßmer, G. (1986). *Anwendungen im Mathematikunterricht* (Empirische Untersuchungen, Vol. 2). Bad Salzdetfurth: Franzbecker.
- Kaiser, G., Blomhøj, M. y Sriraman, B. (2006). Toward a didactical theory for mathematical modelling. *ZDM*, 38 (2), 82-85.
- Krekic, V., & Namestovski, Z. (2009). Computer modelling in mathematics education. In *2009 7th International Symposium on Intelligent Systems and Informatics* (pp. 355–360). Subotica: IEEE. <https://doi.org/10.1109/SISY.2009.5291132>
- Melgarejo, C., Cordero, J., Gonzalez, J. y Sepulveda, O. (2019). Software GeoGebra como herramienta en la enseñanza y aprendizaje de la geometría. *Educación y Ciencia*, 22, 387-402
- Molina-Toro, J., Rendón-Mesa, P. y Villa-Ochoa, Jhony (2019). Research Trends In digital Technologies and Modeling in Mathematics Education. *Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 15 (8), em 1736. <https://doi.org/10.29333/ejmste/108438>
- Niss, M. & Højgaard, T. (2011). *Competencias y aprendizaje de las matemáticas: Ideas e Inspiración para el Desarrollo de la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas en Dinamarca*. Universidad de Roskilde: IMFUFA. Traducción al inglés del original danés (2002).
- Niss, M. & Blum, W. (2020). *The learning and teaching of mathematical modelling*. Taylor G Francis.
- Pérez, I. (2012). Estudio de las aplicaciones de las cónicas mediado por la modelación desde una visión analítica. Universidad Nacional de Colombia. <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/10032>
- Pollak, H.O. (1968). On some of the problems of teaching applications of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 1, 24-30.
- Sáenz, E., Patiño, M., Robles, J. (2017). Desarrollo de las competencias matemáticas en el pensamiento geométrico, a través del método heurístico de Pólya. *Panorama*, 11(21), 53-67. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6297711>
- Universidad de Guadalajara. (2025). Sistema de educación media superior. <https://www.sems.udg.mx/presentacion-bgc>