



Artículo original

Idoneidad didáctica de un proceso de instrucción sobre optimización de funciones reales de dos variables para estudiantes de economía

Didactic Suitability of an Instructional Process on Optimization of Real Functions of Two Variables for Economics Students

Clever Paul Flores Huanca ^{1, a}

Nancy Edith Saravia Molina ^{2, b}

¹ Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas,
Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú
clever.flores@pucp.edu.pe

² Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas,
Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú
nsaraviam@pucp.edu.pe

^b ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2819-8835>

Información

Recibido: 12 de setiembre del 2025.

Aceptado: 15 de diciembre del 2025.

Palabras clave:

Idoneidad didáctica,
optimización, cálculo
multivariable.

Resumen

La optimización matemática es un tema recurrente en carreras profesionales como la matemática, ingeniería o economía. La investigación, empleando la noción de idoneidad didáctica del marco teórico EOS, tiene como objetivo principal valorar la idoneidad didáctica de un proceso de instrucción sobre optimización de funciones reales de dos variables en alumnos de carrera de Economía. En esta investigación, de carácter cualitativa, se identifican los significados de referencia de las derivadas parciales involucrados en problemas de optimización, se adaptan indicadores de idoneidad didáctica en sus seis facetas, y se lleva a cabo el análisis del proceso de instrucción implementado por el profesor comparándolo con los indicadores de idoneidad. Se concluye que el proceso de instrucción observado cumple en gran medida con los indicadores propuestos, particularmente en las facetas epistémicas y cognitivas, lo cual lo convierte en un proceso idóneo, considerando algunos aspectos de mejora en las otras facetas.

Information

Keywords:

Didactic suitability,
optimization,
multivariable calculus.

Abstract

Mathematical optimization is a recurring theme in professional careers such as mathematics, engineering, and economics. Using the notion of didactic suitability of the EOS theoretical framework, the main objective of this research is to assess the didactic suitability of an instructional process on the optimization of real functions of two variables in Economics students. In this qualitative research, the reference meanings of the partial derivatives involved in optimization problems are identified, indicators of didactic suitability are adapted in their six facets, and the instructional process implemented by the teacher is analyzed by comparing it with the suitability indicators. The conclusion is that the observed teaching process largely complies with the proposed indicators, particularly in the epistemic and cognitive facets, which makes it a suitable process, considering some aspects for improvement in the other facets.

INTRODUCCIÓN

La optimización matemática es un campo de estudio con amplias aplicaciones en disciplinas como la matemática, la ingeniería, la física, la estadística y, particularmente, la economía. En este contexto, los contenidos relacionados con el cálculo de una y de varias variables se constituyen como ejes fundamentales en la formación matemática de los estudiantes universitarios de estas áreas. No obstante, el aprendizaje de estos contenidos presenta múltiples desafíos, muchos de los cuales se originan en la comprensión de conceptos previos del cálculo de una variable, en las dificultades para visualizar representaciones en dos y tres dimensiones, en la interpretación gráfico-algebraica de los problemas de optimización, y en la resolución de problemas contextualizados en situaciones profesionales.

Como parte del “Planteamiento del problema”, se realiza una revisión de antecedentes centrada con el avance y desarrollo de investigaciones en la enseñanza-aprendizaje del cálculo multivariable (CMV). Dicha revisión permite constatar la escasez de estudios didácticos específicos en esta área que no hay

suficientes investigaciones en didáctica de las matemáticas en temas del área; muestra las dificultades que manifiestan los estudiantes con los temas del CMV como la comprensión y resolución de problemas con 3 variables, comprensión de las notaciones utilizadas para diferenciabilidad de funciones de varias variables, necesidad de interpretación geométrica o gráfica para asimilar las definiciones y propiedades, generalización o analogías inadecuadas entre propiedades de temas del cálculo de una variable con el CMV; y presenta aquellos conocimientos con que debería contar un profesor que dicte temas de diferenciabilidad y optimización tales como conocimientos de las propiedades de la diferenciabilidad, uso de representaciones gráficas, uso de herramientas tecnológicas.

En cuanto a la justificación, se destaca la relevancia del estudio de la optimización en el CMV dentro de la formación profesional de los estudiantes de Economía, tanto por su presencia en los planes de estudio como por su utilidad en la toma de decisiones en contextos reales. Asimismo, se muestra que la idoneidad didáctica es una herramienta útil para la reflexión en la planificación y evaluación de un proceso de instrucción.

La investigación pretende responder a la pregunta “¿Qué aspectos se pueden mejorar de un proceso de instrucción sobre optimización de funciones de dos variables para estudiantes de Economía?”. Para ello, se plantea como objetivo general “Valorar la idoneidad didáctica de un proceso de instrucción de optimización de funciones reales de dos variables implementado con alumnos de la carrera de Economía”.

MATERIAL Y MÉTODOS

Se trabaja el marco teórico Enfoque Ontosemiótico (EOS) desarrollado en los últimos años por Godino, et al (2017), así como los aspectos necesarios de algunas herramientas de análisis de este marco teórico. De los sistemas de prácticas del EOS, se describen principalmente los significados de referencia como aquellos que se construyen a priori en el análisis o proceso de instrucción, los cuales se pueden encontrar en los textos académicos relacionados con el cálculo multivariable, y la idoneidad didáctica. En cuanto a la idoneidad didáctica, es aquella herramienta que mide el grado o nivel en que cierto proceso de instrucción posee características que lo hacen óptimo o adecuado para lograr la adaptación entre significados personales aprendidos por los estudiantes y los significados institucionales deseados o implementados por el profesor (Godino, et al, 2020).

Asimismo, la investigación, de carácter cualitativa, pretende describir y analizar el fenómeno, el cual es el proceso de instrucción. Para ello, se adaptan los procesos metodológicos propuestos por Hernández, et al, (2014). A partir de los cuales, se plantean siete fases de investigación: Planteamiento del problema; Aspectos teóricos y metodológicos; Identificación del significado de referencia; Adaptación de los indicadores de idoneidad; Descripción y contexto del proceso de instrucción; Análisis del proceso de instrucción; y Consideraciones finales.

RESULTADOS

En primer lugar, como parte de la “Identificación de los significados de referencia”, se analizan textos académicos e investigaciones relacionadas con el objeto matemático. Entre estos están “Cálculo en varias variables. Trascendentes tempranas” (Stewart, 2012); “Matemáticas para el análisis económico” (Sydsæter et al., 2012); Balcaza, et al (2017); Tenorio y Martín, (2015). Los significados de referencia identificados corresponden a los de las derivadas parciales que se encuentren involucrados en la resolución de problemas de optimización y su posterior aplicación a la economía. Se identifican 4 significados: la derivada parcial como expresión algebraica; la derivada parcial para determinar planos tangentes; la derivada parcial como tasa de variación; y la derivada parcial para hallar máximo y mínimos de una función de dos variables. Posteriormente, se plantea la conexión entre los significados de referencia de la derivada parcial y la optimización en la economía, donde se determina que, entre los cuatro significados identificados recurrentemente al resolver problemas de optimización, se utilizan principalmente dos: la derivada parcial como expresión algebraica y la derivada parcial para hallar máximos y mínimos.

En segundo lugar, como parte de la “Adaptación de los indicadores de idoneidad”, se toman como referencia los indicadores propuestos por Pino-Fan y Parra-Urrea (2021); y Verón, et al (2024), quienes

analizan procesos de instrucción de funciones reales de una variable y derivadas de funciones reales de una variable. Esta adaptación de indicadores de idoneidad se realiza para cada una de las seis facetas (epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, afectiva y ecológica) tomando en cuenta los significados de las derivadas parciales y su aplicación en la economía.

En tercer lugar, como parte de la “Descripción y contexto del proceso de instrucción”, se describe el contexto de la investigación, donde se detalla la información relevante a las clases observadas, el profesor seleccionado y los temas de interés que se enseñan en estas clases. El curso dictado por el profesor es “Matemáticas para Economía y Finanzas 2”, el cual es de carácter obligatorio en la formación de la carrera Economía según la universidad privada donde trabaja el profesor. El tema “Optimización de funciones de dos variables” se dicta como parte de la unidad de “Cálculo diferencial de funciones de varias variables” según el sílabo del curso. Además, este tema se dicta como aplicación de las derivadas parciales. La cantidad de clases observadas son seis, entre clases teóricas y prácticas durante dos semanas.

Luego, se lleva a cabo la recopilación de la información necesaria acerca del proceso de instrucción descrito anteriormente para el análisis de la idoneidad didáctica. Se recurre a la técnica “triangulación de datos”, la cual consiste en emplear diferentes fuentes y técnicas de recolección de información para enfocar la validez, amplitud y profundidad en la investigación (Jiménez, 2012; Hernández, et al, 2014). Para ello, se utilizan las siguientes técnicas de recolección de datos:

- Observaciones de clases, las cuales se videografiaban desde un celular y una tablet que enfocó al salón de clases, al profesor y a la pizarra mientras el profesor desarrollaba el tema. Los indicadores de idoneidad didáctica sirven como guía de observación de clases.
- Entrevista semiestructurada con el profesor, la cual se realiza para complementar lo recopilado en las videografías, considerando la preparación de la clase, hasta su posterior evaluación durante las prácticas del curso. Para ello, se elabora un cuestionario con algunas preguntas y temas guía sobre la base de los indicadores de idoneidad didáctica construidos previamente.
- Materiales de clase didácticos, los cuales consisten en los materiales utilizados para la enseñanza de clases como las presentaciones de clase, las hojas de ejercicios y las evaluaciones tomadas a los alumnos.

DISCUSIÓN

Con relación a la idoneidad epistémica del proceso de instrucción, se observa que el profesor presenta situaciones-problema variados de la derivada parcial aplicada a la optimización en economía mediante la modelización de funciones, presenta adecuadamente las definiciones y procedimientos de optimización para optimización sin restricciones y optimización con restricciones. Sin embargo, la gran mayoría de problemas se limitaban a un trabajo en representación algebraica de la optimización de funciones en comparación las representaciones gráficas de las funciones y su explicación de máximos, mínimos y restricciones. Las representaciones gráficas únicamente se utilizan en la introducción de cada tipo de optimización y para exemplificar el punto silla. Además, el significado de derivada parcial como tasa de cambio no se evidencia en los ejemplos con excepción de la interpretación del multiplicador de Lagrange en un par de problemas. Asimismo, tampoco se evidencian espacios para que el estudiante cree problemas de optimización o situaciones donde se pueda plantear el procedimiento de la optimización para consolidar la comprensión del tema.

Con relación a la idoneidad cognitiva del proceso de instrucción, se observa que los estudiantes sí cuentan con los conocimientos previos para llevar el tema de optimización de funciones de dos variables, debido a que previamente se evaluaron temas de reglas de derivación, optimización de funciones reales de una variable y el cálculo de derivadas parciales. Además, el profesor suele hacer analogías entre el procedimiento utilizado para optimizar funciones de una variable con el procedimiento propuesto para optimizar funciones de dos variables para que el estudiante pueda comprender que el tema tiene similitudes con un tema antes visto y que, por lo tanto, no es difícil, según afirma el profesor. Según la programación del curso y del profesor, se incluyen dos sesiones prácticas para revisar problemas relacionados con la optimización de funciones de dos variables. Asimismo, estos conocimientos son

evaluados en la Evaluación Continua 3 para verificar la apropiación de los significados por parte de los alumnos, lo cual se evidencia en el análisis de las respuestas de los alumnos que lograron comprender, en su mayoría, el procedimiento de optimización con restricciones y optimización sin restricciones pese a los errores de cálculo relacionados con la resolución de sistemas de ecuaciones u otros. También se encontraron problemas que exigen alta demanda cognitiva donde el estudiante requiera plantear funciones y restricciones a partir de cierto contexto.

Con relación a la idoneidad interaccional del proceso de instrucción, se observa que el profesor da espacios de autonomía a sus alumnos para resolver problemas en clase, así como da su disposición a supervisar el proceso formativo mediante las actividades de clase en las sesiones prácticas y las evaluaciones. Sin embargo, a pesar de que la presentación del tema es lento y calmado, pero la organización realizada por el profesor en pizarra puede dificultar la interacción con el alumno al hacer anotaciones. Además, no se evidencian espacios para actividades de interacción entre alumnos, como trabajos grupales u otras dinámicas, los cuales son aspectos para tomar en cuenta debido a que son relevantes para que la interacción sea idónea.

Con relación a la idoneidad mediacional del proceso de instrucción, se encuentra que, a pesar de contar con los recursos tecnológicos necesarios, no es frecuentemente utilizado para presentar representaciones gráficas de la optimización y que no se limiten únicamente a representaciones y cálculo algebraicos. Asimismo, las condiciones del aula no son propicias debido al espacio limitado de las carpetas y extensión del salón, el horario temprano de la clase, así como factores externos como el ruido, puesto que estos factores pueden influir en la comprensión del estudiante e, incluso, en su ausentismo en clase. Pese a ello, el tiempo asignado y planificado para cada sesión fue óptimo para cubrir los temas y, así, revisar varios problemas de optimización. salvo para introducir el tema, explicar el concepto de punto silla y ejemplificar qué es optimizar con restricciones de igualdad.

Con relación a la idoneidad afectiva del proceso de instrucción, se observa que los temas y la introducción al tema de optimización de funciones de dos variables es orientado más hacia al área matemática y sin enfatizar su relevancia en el área económica, sino hasta resolver problemas de aplicación trabajados en la sesión práctica, lo cual es un aspecto que debe considerarse para un proceso de instrucción de estudiantes que siguen la carrera de Economía. Además, Se encontró que el procedimiento propuesto por el profesor es repetitivo como un “receta”, lo cual es favorable para que el estudiante tenga más confianza en recordar el método, pero que los problemas no se limiten únicamente a aplicar “recetas”, sino también a considerar análisis como es el caso de problemas donde se requiera plantear expresiones que modelicen un contexto el cual no está explícito en el enunciado. Asimismo, el profesor se encuentra pendiente con que el estudiante se sienta cómodo y no rechace el tema.

Con relación a la idoneidad ecológica del proceso de instrucción, se observa que los significados de las derivadas parciales propuestos en este trabajo se implementaron adecuadamente según el sílabo del curso y los problemas propuestos abarcan situaciones aplicadas a la economía donde se modelizan funciones como utilidad, ingreso, costo, producción, entre otros. Sin embargo, no se evidencian espacios hacia el uso de tecnologías que permitan que el estudiante comprenda la optimización desde otra perspectiva y manipule gráficas. Asimismo, no se evidencia que el profesor promueva la reflexión por la investigación del tema de optimización en la economía. Además, el profesor relaciona el tema de optimización de funciones de dos variables con temas y cursos previos, mas no con cursos posteriores como la “Microeconomía”, “Macroeconomía”, “Matemática avanzada para economistas” u “Optimización y métodos dinámicos”.

Conclusiones

Se concluye que la investigación cumple con el objetivo general, el cual es valorar la idoneidad didáctica de un proceso de instrucción de optimización de funciones reales de dos variables en alumnos de Economía. Para ello, durante la investigación, se identifican significados de referencia de la derivada parcial involucrados en la optimización, se adaptan indicadores de idoneidad didáctica a partir de trabajos relacionados con el objeto matemático, y, con ello, se lleva a cabo el análisis y la valoración mediante la comparación entre los indicadores de idoneidad y el proceso de instrucción implementado por el profesor.

En cuanto a los análisis de la idoneidad epistémica e idoneidad cognitiva, se concluye que el proceso de instrucción muestra una buena representatividad entre lo que el profesor implementó en sus clases comparado con lo que sería idóneo implementar, así como también muestra una buena relación e instrucción de los significados de la derivada parcial y su aplicación con la optimización en los estudiantes. Esto se debe a que varios de los indicadores se cumplen y son evidenciados según lo analizado previamente.

En cuanto a los análisis de las idoneidades interaccional, mediacional, afectiva y ecológica, se concluye que a pesar de que evidencia que varios indicadores se cumplen según el proceso de instrucción observado, hay aún aspectos por mejorar, los cuales se describen a continuación. Aunque se fomente la autonomía del estudiante y la presentación del tema sea claro y calmado, es importante considerar la realización de interacciones grupales y mantener un orden al presentar resoluciones de problemas en pizarra debido para, así, mantener una buena interacción en clase que asegure la comprensión del tema. Asimismo, se evidencian otros aspectos de mejora como el horario las clases, la disposición del espacio del aula en cuanto a su aforo y el aprovechamiento de herramientas tecnológicas más frecuentes para que el alumno se encuentre en ambiente cómodo y mantenga su atención con el curso. Además, es relevante considerar que en un proceso de instrucción a alumnos de economía, se debe enfatizar la importancia de la optimización en la economía y la promoción del análisis de problemas donde se requiera plantear expresiones que no estén explícitamente en el enunciado. Por último, hay aspectos por mejorar como la reflexión del tema de optimización en la economía por parte de los estudiantes y la conexión del tema con cursos posteriores para evidenciar deben ser aspectos importantes por considerar en el dictado para que un alumno pueda mantener el interés con la carrera y, así, comprender de una mejor manera los temas.

Algunos aspectos que limitaron este trabajo de investigación son el tiempo para coordinar las observaciones de clase y entrevista con el profesor debido a la programación de las seis sesiones observadas y los permisos requeridos para llevar a cabo la investigación. A pesar de que no se encontraron suficientes investigaciones de referencia que abordaran temas del cálculo multivariable haciendo uso de la idoneidad didáctica del EOS, el presente trabajo resulta un gran aporte a la investigación en didáctica de las matemáticas en el cálculo multivariable, particularmente, en la optimización de funciones de dos variables en estudiantes de Economía, puesto que propone indicadores de idoneidad didáctica, así como la identificación de significados de referencia de la derivada parcial involucrados en la optimización.

Se recomienda, para futuros análisis de procesos de instrucción de optimización de funciones de dos variables, adaptar los indicadores propuestos en este trabajo para el grupo objetivo de estudiantes que se pretenda analizar, sean alumnos de diferentes carreras o en instituciones educativas que usen otros libros de texto. Asimismo, se plantea ampliar esta investigación a procesos de instrucción donde se enseñe optimización de funciones de más de dos variables, así como optimización cuando las restricciones no son de igualdad, sino de desigualdad. Además, se sugiere investigar qué otras herramientas tecnológicas existen y se utilicen en procesos de instrucción donde se enseñe la optimización matemática aplicada a diferentes rubros profesionales como la ingeniería o la administración. Finalmente, se recomienda investigar qué otros métodos de optimización matemática, donde no se utilicen las derivadas parciales, existen y cuáles son sus aplicaciones en el ámbito profesional.

REFERENCIAS

- Balcaza, T., Contreras, A. y Font, V. (2017). Análisis de libros de texto sobre la optimización en el bachillerato. *Bolema*, 31(59), 1061-1081. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n59a11>
- Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2020). El enfoque ontosemiótico: implicaciones sobre el carácter prescriptivo de la didáctica. *Revista Chilena de Educación Matemática*, 12(2), 3-15. <https://doi.org/10.46219/rechim.v12i2.25>

- Godino, J., Giaconomne, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque Ontosemiótico de los Conocimientos y Competencias del Profesor de Matemáticas. *Boletim de Educação Matemática*, 31(57), 90-113. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05>
- Hernández, R., Fernández P. y Baptista, J. (2014). *Metodología de la investigación*. (6^a ed.). McGraw Hill Education.
- Jiménez, V. (2012). El estudio de caso y su implementación en la investigación. *Revista Internacional de Investigación en Ciencias Sociales*, 8(1), 141-150. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3999526>
- Pino-Fan, L. y Parra-Urrea, Y. (2021). Criterios para orientar el diseño y la reflexión de clases sobre funciones. *Uno Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 91, 45-54.
- Stewart, J. (2012). *Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas*. (7^a ed.). Cengage Learning.
- Sydsæter, K., Hammond, P., y Carvajal, A. (2012). *Matemáticas para el análisis económico*. (2^a ed.). Pearson Education.
- Tenorio, A. y Martín, A. (2015). Explicando la optimización de funciones con el uso de software de álgebra computacional y geometría dinámica. *Anales de ASEPUA*, 23, 1-24. <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/6010318.pdf>
- Verón, M., Giacomone, B. y Pino-Fan, L. (2024). Guía de valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de la diferencial. *Uniciencia*, 38(1), 1-22. <http://dx.doi.org/10.15359/ru.38-1.2>