Quintaesencia
Revista de Educación
ISSN 2076-5363 (en línea)

Quintaesencia [(2025), vol. 16, Núm. 2, pp 142-146]
DOI: https://doi.org/10.54943/rq.v16i2.756

Socialización de experiencias

VII COBISEMAT 2025 – CUSCO

Coloquio Binacional sobre Enseñanza de Matemáticas. Universidad Nacional San Antonio Abad del Cusco. 9, 10 y 11 de julio de 2025.

Propuesta de enseñanza del cálculo de límites para un primer curso de cálculo

A Teaching Proposal for the Calculation of Limits in a First Calculus Course

Karol José María Huarcaya Huarcaya [1, a] **Dallana Castillo León** [2, b] **Francisco Ugarte Guerra** [3, c]

[1] Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas, Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú
[a] ORCID: https://orcid.org/0009-0006-3310-2988
huarcaya.kj@pucp.edu.pe

[2] Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas, Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú
[b] ORCID: https://orcid.org/0009-0007-0469-6358
castillo.dd@pucp.edu.pe

[3] Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas, Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú
[c] ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8658-9471
fugarte@pucp.edu.pe

Información

Recibido: 15 de julio del 2025
Aceptado: 29 de julio del 2025

Palabras clave:

Aprendizaje colaborativo y cálculo de límites.

Resumen

El abordaje del cálculo de límites es un tema común en los programas de calculo para estudiantes de Ingeniería y Arquitectura y muy desafiante para el docente, por lo completo que resulta para los alumnos. El siguiente trabajo se ha estructurado alrededor de la enseñanza aplicada de cuatro teoremas fundamentales. Estos teoremas permiten resolver límites en funciones racionales, polinómicas, funciones potencia, raíz cuadrada y raíz cúbica, además de abordar comportamientos al infinito, con un enfoque claro y progresivo. En las sesiones prácticas, el trabajo del estudiante se desarrolla de manera colaborativa, promoviendo la comprensión conceptual mediante el uso de la pizarra digital y la exposición de ejemplos por parte de los profesores de práctica. Además, se fomenta el aprendizaje entre pares como parte esencial del proceso formativo. Esta experiencia ha permitido fortalecer el razonamiento matemático desde una perspectiva aplicada, facilitando la apropiación significativa de los conceptos clave del análisis en el cálculo de límites.

Information

Keywords:

Collaborative learning and calculation of limits.

Abstract

The approach to calculating limits is a common topic in calculus programs for engineering and architecture students, and very challenging for teachers, given how comprehensive it is for students. The following work has been organized in relation to the applied teaching of four fundamental theorems. These theorems allow limits to be solved in rational, polynomial, power, square root, and cube root functions, as well as addressing behavior at infinity with a clear and progressive approach. In the practical sessions, students work collaboratively, promoting conceptual comprehension through the use of a digital whiteboard and examples provided by preservice teachers. In addition, peer learning is encouraged as an essential part of the learning process. This experience has strengthened mathematical reasoning from an applied perspective, facilitating the meaningful appropriation of key concepts in analyzing the calculation of limits.

INTRODUCCIÓN

El estudio del cálculo de límites es un tema común en la enseñanza universitaria de las matemáticas, especialmente en carreras como Arquitectura, donde el calculo diferencial constituye la base del lenguaje para el estudio de los fenómenos físicos para la comprensión de fenómenos físicos y espaciales asociados a los cursos de la línea de estructuras de las especialidades de Arquitectura e Ingeniería. Sin embargo, uno de los principales desafíos identificados en este proceso de enseñanza-aprendizaje es la complejidad conceptual que implica la resolución de límites en funciones racionales y polinómicas, así como en el análisis del comportamiento al infinito de dichas funciones (Stewart, 2021; Larson & Edwards, 2020).

Figura 1

Profesor de práctica usando pizarra digital

Diversas investigaciones destacan que el aprendizaje colaborativo representa una estrategia efectiva para enfrentar tales desafíos. Según Johnson y Johnson (2014), el trabajo colaborativo en pequeños grupos no solo facilita la comprensión conceptual profunda, sino que también estimula la capacidad de razonamiento matemático en los estudiantes. Asimismo, estudios recientes afirman que el aprendizaje colaborativo mejora la resolución de problemas complejos en matemáticas al promover la interacción activa entre los estudiantes, lo que a su vez incrementa la motivación y el rendimiento académico (Slavin, 2015; Barkley, Cross & Major, 2014).

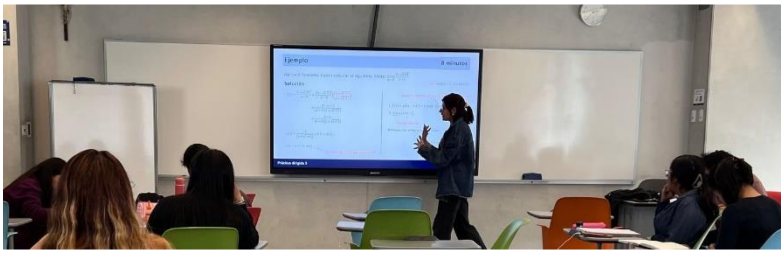
Figura 2

Profesor de práctica usando pizarra digital

En este contexto, la propuesta educativa desarrollada en las sesiones prácticas del curso Matemáticas 2 para estudiantes de Arquitectura de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP), se basa en cuatro teoremas fundamentales. El primer teor ema permite abordar límites que implican cocientes de funciones, facilitando el análisis mediante la identificación y cancelación de factores comunes cuya raíz coincide con el punto de tendencia del límite (Larson & Edwards, 2020). El segundo teorema ofrece las herramientas algebraicas esenciales para resolver límites en diversas situaciones, incluyendo límites de funciones constantes, identidad, suma, producto, cociente, potencias, raíces cuadradas y cúbicas (Stewart, 2021).

Figura 3

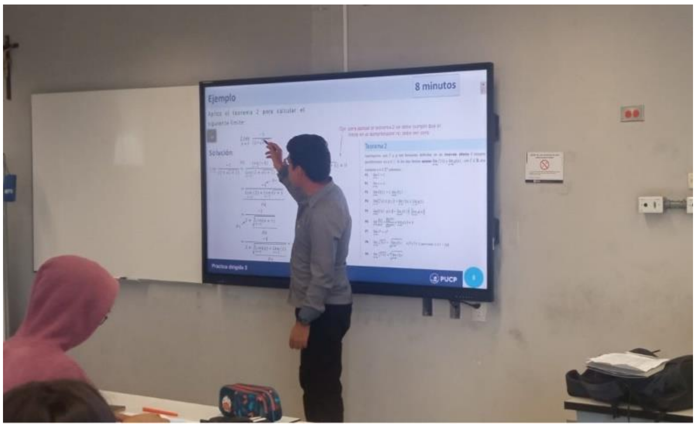
Profesor de práctica usando pizarra digital



El tercer teorema es particularmente útil para analizar límites en situaciones de indeterminación cuando el denominador de una función racional tiende a cero, un problema habitual en la práctica matemática universitaria. Finalmente, el cuarto teorema permite analizar límites al infinito de funciones recíprocas y sus potencias, consolidando así una comprensión más amplia sobre el comportamiento asintótico de las funciones racionales.

Figura 4

Profesor de práctica usando pizarra digital



La pertinencia de esta propuesta radica en la necesidad de implementar métodos pedagógicos que no solo faciliten la adquisición de habilidades técnicas en el cálculo de límites, sino que también promuevan el desarrollo integral del razonamiento matemático a través de la colaboración. La experiencia didáctica que se socializará destaca la organización estructurada de sesiones prácticas, el uso activo de la pizarra digital, y la exposición didáctica de ejemplos por parte de los profesores de práctica. Esta metodología busca evidenciar cómo el trabajo colaborativo mejora significativamente la comprensión y retención de los conceptos matemáticos fundamentales relacionados con el análisis de límites.

MATERIAL Y MÉTODOS

Contexto

La experiencia se desarrolló en el ámbito educativo universitario, específicamente en el curso de Matemáticas 2 (MAT146) perteneciente a la Facultad de Arquitectura y Urbanismo de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP). Los sujetos participantes fueron estudiantes del primer año de la carrera, quienes llevaron a cabo actividades prácticas orientadas por profesores de práctica. El objetivo central fue fortalecer el aprendizaje del cálculo de límites mediante la aplicación estructurada de cuatro teoremas fundamentales.

Relato

Las sesiones de práctica se organizaron en actividades secuenciales, cada una centrada en la aplicación de un teorema específico relacionado con límites de funciones racionales, polinómicas, funciones potencia, raíz cuadrada y raíz cúbica. Inicialmente, el profesor de práctica realizaba una explicación utilizando la pizarra digital mediante la proyección de diapositivas o empleando el software OpenBoard, mostrando paso a paso cómo aplicar correctamente cada teorema. Posteriormente, los estudiantes, organizados en grupos de dos integrantes, resolvían problemas análogos para consolidar su aprendizaje. La validación del aprendizaje se efectuaba mediante la exposición oral por parte de un estudiante de cada equipo, quien explicaba al profesor de práctica la solución de uno de los problemas trabajados. Esta metodología promovió un ambiente colaborativo, participativo y reflexivo entre los estudiantes y los docentes involucrados.

RESULTADOS

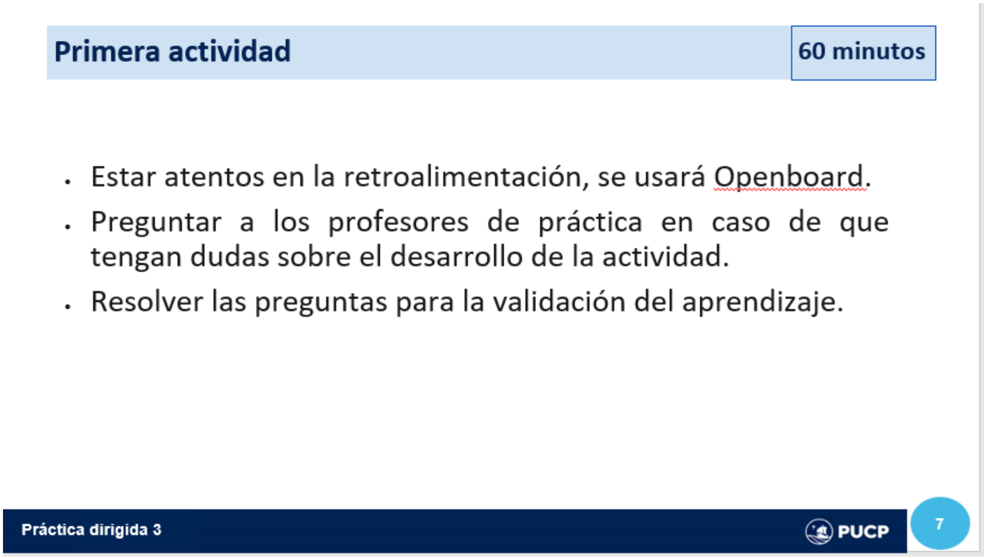
Los resultados de la experiencia muestran que los estudiantes, al aprender de forma estructurada y por partes la aplicación específica de cada teorema, logran identificar claramente las diferencias en su uso para cada tipo de función. Los profesores de practica indicaron que hubo un aumento de motivación y satisfacción entre los estudiantes al resolver los problemas colaborativamente e interactuar activamente con sus compañeros. No obstante, se identificó como dificultad principal el manejo del tiempo durante las sesiones prácticas. Al organizar las sesiones en actividades segmentadas, que en semestres anteriores estaban planificadas en dos horas, lo que lleva en algunos casos a dividir las sesiones prácticas originalmente planificadas para dos horas, en dos sesiones de cuatro horas cada una, afectando la planificación inicial del curso.

REFERENCIAS

Johnson, D. W., & Johnson, R. T. (2013). *Cooperation in the Classroom* (9ª ed.). Interaction Book Company.

Slavin, R. E. (1995). *Cooperative Learning: Theory, Research, and Practice* (2ª ed.). Allyn & Bacon.

Anexo



Ejemplo

8 minutos

Aplica el teorema 2 para calcular el siguiente límite:

$$\underset{x\to 3}{Lim}\ \frac{-1}{(2+\sqrt{x+1})}$$

Solución

$$\underset{x\to 3}{Lim}\ \frac{-1}{(2+\sqrt{x+1})} \overset{P6}{=} \frac{\underset{x\to 3}{Lim}(-1)}{\underset{x\to 3}{Lim}(2+\sqrt{x+1})}$$

$$= \frac{\overset{P1}{-1}}{\underbrace{\underset{x\to 3}{Lim}\ (2) + \underset{x\to 3}{Lim}\sqrt{x+1}}_{P4}}$$

$$= \frac{-1}{\overset{P1}{2} + \underbrace{\sqrt{\underset{x\to 3}{Lim}(x+1)}}_{P8}}$$

$$= \frac{-1}{2 + \underbrace{\sqrt{\underset{x\to 3}{Lim}(x) + \underset{x\to 3}{Lim}(1)}}_{P4}} = \frac{-1}{2+\sqrt{\underset{P2}{3}+\underset{P1}{1}}} = -\frac{1}{4}$$

Ojo: para aplicar el teorema 2 se debe cumplir que el límite en el denominador no debe ser cero.

$$\underset{x\to 3}{Lim}(2+\sqrt{x+1}) \neq 0$$

$$x+1 \geq 0$$

Teorema 2

Supongamos que f y g son funciones definidas en un **intervalo abierto** I excepto posiblemente en $a \in I$. Si los dos límites **existen** $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$; con $C \in \mathbb{R}$ una contante y $n \in \mathbb{Z}^+$ entonces:

- **P1.** $\lim_{x\to a} C = C$
- **P2.** $\lim_{x\to a} x = a$
- **P3.** $\lim_{x\to a} Cf(x) = C \lim_{x\to a} f(x)$
- **P4.** $\lim_{x\to a}\left(f(x) \pm g(x)\right) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$
- **P5.** $\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]\cdot\left[\lim_{x\to a} g(x)\right]$
- **P6.** $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ si $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$
- **P7.** $\lim_{x\to a} x^n = a^n$
- **P8.** $\lim_{x\to a}\sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x\to a} f(x)}$ si $f(x) \geq 0$, para cada $x \in I - \{a\}$
- **P9.** $\lim_{x\to a}\sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{\lim_{x\to a} f(x)}$

Práctica dirigida 3 — PUCP — 8

Preguntas para validación

30 minutos

Para los ejercicios del 1 al 18: Calcule, si es posible, los siguientes límites. Si utiliza el Teorema 1 muestre que se cumple las condiciones que exige el teorema (hipótesis de teorema), en caso del Teorema 2 indique las propiedades utilizadas.

11. $\underset{x\to 4}{Lim}\frac{x^2+2x}{2\sqrt{x}-1}$

12. $\underset{x\to -1}{Lim}\frac{x^3+5}{\sqrt[3]{x}+2}$

13. $\underset{x\to 0}{Lim}\frac{x^2+4}{\sqrt[3]{x}-2}$

14. $\underset{x\to 2}{Lim}\frac{x^2-\sqrt{13}}{x+\sqrt{5}}$

Práctica dirigida 3 — PUCP — 9