OBSTÁCULOS Y ERRORES EN EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN EN LOS ESTUDIANTES DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL MICAELA BASTIDAS DE APURÍMAC

OBSTACLES AND ERRORS IN LEARNING OF THE FUNCTION CONCEPT IN THE STUDENTS OF THE NATIONAL UNIVERSITY OF APURIMA – MICAELA BASTIDAS

Alejandro Manuel Ecos Espino
Universidad Nacional Micaela Bastidas de Apurímac

Recibido 14-12-03 / Aceptado 15-02-23

RESUMEN

Objetivo: determinar los obstáculos y errores que manifiestan los estudiantes de la Universidad Nacional Micaela Bastidas de Apurímac en relación al uso de las diversas representaciones del concepto de función. **Método**: estudio descriptivo con diseño no experimental de tipo descriptivo simple. La recopilación de la información se hizo a través de la aplicación de un cuestionario compuesto de 9 preguntas abiertas, a una muestra de 99 estudiantes de las diferentes carreras profesionales de la Universidad. **Resultados:** prevalece en los estudiantes la concepción de función como una ecuación. Existe un mejor desempeño cuando trabajan con una expresión algebraica a la cual pueden evaluar; cuando trabajan en otras formas de representación muestran dificultades para llevar a cabo coordinaciones y conversiones. **Conclusión:** se identificó el obstáculo de tipo epistemológico y cognitivo relacionado a la consideración de que una función debe estar escrita a través de una sola expresión algebraica; y el obstáculo didáctico de la no reversibilidad de la conversión que no les permite efectuar conversiones en sentido contrario. Los errores encontrados se refieren a la asociación de una función con una fórmula o una curva regular, y la evaluación que se hace de esta en base a la similitud que puedan tener con otras funciones tipos.

Palabras clave: obstáculos, errores, función.

Objective: To identify obstacles and errors that manifest students of the National University of Apurimac – Micaela Bastidas regarding the use of different representations of the function concept. **Method:** Descriptive study with non-experimental design of simple descriptive type. The collection of information was done through a questionnaire composed of 9 open questions, a sample of 99 students from different careers of the University. **Results:** Students prevail with the conception of function as an equation. There is a better performance when they work with an algebraic expression that can be evaluated; when they are working in other forms of representation show difficulties to carry out coordination and conversions. **Conclusion:** It was identified the obstacle of epistemological and cognitive type related to the consideration that a function must be written by a single algebraic expression; and didactic obstacle of non-reversibility of the conversion that does not allow them to carry out conversions in the opposite direction. The errors found concern the association of a function with a formula or a regular curve, and the assessment made on the basis of this similarity they may have with other type functions.

Keywords: obstacles, errors, function.

INTRODUCCIÓN

En Didáctica de la Matemática, es muy conocido que la enseñanza habitual de conceptos relacionados al cálculo se basa en la transmisión de conocimientos con un énfasis muy marcado en el desarrollo de habilidades algebraicas, desatendiéndose el discernimiento intelectual para la comprensión de ideas, nociones y conceptos.

Al respecto, Moreno (1) indica que la enseñanza de los principios del cálculo resulta bastante problemática y, aunque seamos capaces de enseñar a los estudiantes a resolver de forma más o menos mecánica algunos problemas estándar, tales acciones están muy lejos de lo que supondría una verdadera comprensión de los conceptos y métodos del pensamiento de esta parte de la matemática.

El concepto de función es muy importante para la formación de los futuros profesionales de nivel universitario. Su aprendizaje adecuado permitirá modelar situaciones de la vida real y trabajar sin muchas dificultades con conceptos más avanzados que hagan uso del él. Al respecto, Eisenberg (2) señala que la función es un concepto crucial en la comprensión de la matemática y que desarrollar en los estudiantes una sensibilidad para las funciones debe ser uno de los objetivos primordiales del currículo.

En relación al concepto de función, Artigue (3) encontró rupturas entre las definiciones dadas por los estudiantes y los criterios que utilizan en las tareas de reconocimiento de objetos funcionales o de clasificación de funciones y no-funciones dadas en registros diferentes. Estos criterios traducían una concepción de la noción de función que no se organizaba en torno a la definición, sino en relación con prototipos comunes encontrados (como la continuidad), de la asociación entre función y fórmula o de la asociación función-curva regular.

Evangelidou *et al* (4) realizaron un estudio sobre las concepciones de estudiantes universitarios acerca del concepto de función. Encontraron que un gran porcentaje de estudiantes identificaron una función con el concepto específico de "*función uno a uno*". También encontraron la tendencia a buscar una relación analítica entre dos variables y que conectaban la noción de "función" con un tipo de diagrama (cartesiano o una aplicación). Por el contrario, al enfrentarse a expresiones algebraicas, no aparece una clara comprensión de la definición de función. Afirman que la mayoría de los estudiantes parecen identificar las formas estereotípicas familiares de la enseñanza preuniversitaria como funciones.

De la Rosa (5) encontró que los estudiantes muestran la falta del concepto de función lineal en el lenguaje natural y la carencia de la habilidad de visualización (la conversión bidireccional entre la gráfica y la expresión algebraica). El mismo investigador, encontró que los docentes tienen muy arraigada la idea de las funciones escritas con una sola expresión algebraica, por lo tanto este representa un gran obstáculo epistemológico (6).

Los conceptos que se abordan en matemática no son accesibles por medio de la percepción ni mucho menos de manera instrumental. La manera que tenemos para acceder a ellos es a través de representaciones externas. Duval (7) afirma que no hay conocimiento sin representación.

Este mismo autor plantea que las representaciones semióticas son producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propias restricciones de significado y de funcionamiento. Una figura geométrica, un enunciado en lengua natural, una fórmula algebraica, una gráfica, son representaciones semióticas que pertenecen a sistemas semióticos diferentes (8).
La adquisición conceptual de un objeto matemático se basa en el uso de más registros de representación semiótica y la creación y el desarrollo de sistemas semióticos nuevos. En tal sentido, si se llama semiosis a la aprehensión o la producción de una representación semiótica, y neosis a la aprehensión conceptual de un objeto, afirma que la neosis es inseparable de la semiosis. Sostiene que el análisis de los problemas de aprendizaje de las matemáticas y de los obstáculos a los cuales se enfrentan regularmente los alumnos debe conducir a que se reconozca esta afirmación. Esto va ligado con el hecho de que no puede haber comprensión en matemáticas sino se distingue un objeto de su representación, de manera que el recurso a una pluralidad de registros de representación de cierto objeto permite ir consolidando una red conceptual que mejora el nivel de aprendizaje de dicho objeto matemático (9).

Considera que la actividad intelectual consiste esencialmente en la transformación de las representaciones semióticas en la perspectiva de elaborar nuevas representaciones. Plantea dos grandes tipos de transformaciones: el tratamiento (dentro de un sistema de representación) y la conversión (entre registros de sistemas de representaciones diferentes). (10)

A partir de ello, expresa que la actividad conceptual implica la coordinación de los registros de representación, y plantea que la conversión de las representaciones es para el aprendizaje, una actividad tan fundamental como las actividades de formación o de tratamiento. Esto porque solo la conversión puede favorecer la coordinación de los registros de representación. (9)

En todo este proceso de construcción del conocimiento matemático aparecen sistemáticamente errores y obstáculos que influyen en el aprendizaje de los estudiantes, por lo que se debe incluir criterios de diagnóstico, corrección y superación mediante actividades que promuevan el ejercicio de la crítica sobre sus propias producciones.

Mulhem (11) sostiene que los errores surgen en la clase generalmente de manera espontánea y sorprenden al profesor. Son persistentes, particulares, de cada individuo y difíciles de superar porque requieren de una reorganización de los conocimientos en el alumno. Plantea que predominan los errores sistemáticos con respecto a los errores por azar u ocasionales. Los estudiantes en el momento no toman conciencia del error. Algunos errores se gestan en la comprensión o el procesamiento que hace el estudiante de la información que da el profesor.

Socas (12) afirma que un obstáculo es un conocimiento adquirido, no una falta de conocimiento. Este tiene un dominio de eficacia. Es resistente, y resultará más resistente cuanto mejor adquirido esté o cuanto más haya demostrado su eficacia y su potencia en el anterior dominio de validez. El estudiante lo utiliza para producir respuestas adaptadas en un cierto contexto. Cuando se usa fuera de ese contexto genera respuestas inadecuadas, incluso incorrectas. Es indispensable identificarlo e incorporar su rechazo en el nuevo saber. Después de haber notado su inexactitud, continúa manifestándose esporádicamente.

Selden y Selden (13) clasifica los obstáculos en: epistemológicos, si surgen a partir de la naturaleza de aspectos particulares del conocimiento matemático; cognitivos, si surgen de la cognición de un individuo sobre un tópico matemático concreto; y didácticos, si surgen a partir de características particulares de la enseñanza de las matemáticas.

Los estudiantes ingresantes a la Universidad Nacional Micaela Bastidas de Apurímac, incluso de niveles superiores, muestran un bajo nivel de comprensión sobre conceptos matemáticos, mostrando una preferencia por el trabajo en el registro algebraico. Los libros de texto recomendados por los docentes en los sílabos y en los planes de estudio siguen esta misma tendencia, prevaleciendo el uso de la representación algebraica, con escasas situaciones o problemas para llevar a cabo conversiones con otros tipos de representación.

En virtud a lo anterior, la investigación pretende determinar los obstáculos y errores que cometen los estudiantes de la Universidad Nacional Micaela Bastidas de Apurímac en la articulación de diversos registros de representación del concepto de función. La hipótesis que planteamos fue que los obstáculos y errores que cometen los estudiantes en el proceso de articulación de registros de representación del concepto de función son de naturaleza cognitiva y didáctica

MATERIAL Y MÉTODOS

El método de investigación utilizado en esta investigación fue el descriptivo, y el diseño de investigación descriptivo simple. La muestra fue de 99 estudiantes de las diferentes carreras de la Universidad Nacional Micaela Bastidas de Apurímac, distribuidos de la siguiente manera: 33 de Ingeniería de Informática y Sistemas, 32 de Ingeniería de Minas, 27 de Ingeniería Agroindustrial y 07 de Educación Matemática e Informática. Estos estudiantes ya habían cursado el curso de Matemática Básica, donde se lleva la Unidad: Funciones.

Se aplicó un cuestionario compuesto de 9 preguntas abiertas, las cuales fueron construidas de manera tal que el estudiante muestre su forma de abordar los diferentes registros de representación del concepto de función. Los registros de representación considerados en la construcción de las preguntas fueron los siguientes:

- Registro analítico (RA): cuando hacemos referencia a la definición de función mediante una expresión algebraica.
- Registro verbal (RV): cuando el lenguaje común es utilizado para representar situaciones del mundo real. Estas pueden ser modeladas en otros registros.
- Registro tabular (RT): corresponde a los valores numéricos de la función organizados en tablas de valores.
- Registro gráfico (RG): es la representación en el plano cartesiano, incluyendo los convenios implícitos en la lectura de gráficos.

La descripción de las acciones esperadas son las siguientes:

Tabla 01. Acciones a realizar con los registros de representación

Reconocimiento de los elementos de un sistema de representación semiótico	R_V, R_A, R_G, R_T
Transformaciones internas en un registro de representación semiótico	T_V, T_A, T_G, T_T
Conversiones entre sistemas de representación semióticos	$C_{A\rightarrow V}$, $C_{A\rightarrow G}$, $C_{A\rightarrow T}$, $C_{V\rightarrow G}$
Coordinación entre diferentes sistemas de representación semióticos	$C_{A\leftrightarrow V}$, $C_{A\leftrightarrow G}$, $C_{A\leftrightarrow T}$, $C_{V\leftrightarrow G}$
Producción de representaciones semióticas en la resolución de una tarea	PS_V, PS_A, PS_G, PS_T

RESULTADOS

Los resultados obtenidos en relación a la concepción de los estudiantes acerca del concepto de función muestran que el 39% concibe como una expresión algebraica o ecuación; un 7%, como una gráfica y otro 7%, como un conjunto de pares ordenados; con lo cual, el 53% identifica a una función con una de sus formas de representación. Otro 7% concibe a una función como un procedimiento mediante el cual su gráfica debe ser cortada por una vertical en un solo punto. Sin embargo, se evidencia en sus respuestas la aplicación de este procedimiento de manera mecánica, sin una justificación clara de por qué la intersección se debe dar en un solo punto. Por otro lado, el 11% de los estudiantes concibe a una función como una relación; sin embargo, no describen la condición principal que debería cumplir para que sea una función. Esta condición es identificada solo por el 6% del total de estudiantes. Se observa que más del 50% de estudiantes de las carreras de Ingeniería confunden una función con una de sus formas de representación, y que prevalece en ellos el trabajo dentro del registro algebraico, lo cual pone en evidencia la naturaleza didáctica de las dificultades que enfrentan.

El 62% de estudiantes respondieron correctamente la pregunta 2 del cuestionario, efectuando las acciones: R_V, R_A, $C_{A\leftrightarrow V}$, $C_{A\leftrightarrow T}$, $C_{A\rightarrow T}$. El 8% no respondió la pregunta. El 30% respondió de manera incorrecta, evidenciando dificultades para efectuar R_A y R_V. Tal es el caso del estudiante 40:

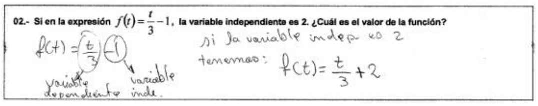

Gráfico 01. Respuesta del estudiante 40

El estudiante no reconoce los elementos de una función dentro de la expresión algebraica. Interpreta incorrectamente la expresión “variable independiente”. Confunde la función con una de sus representaciones; en este caso, un polinomio de primer grado, lo cual le lleva a efectuar incorrectamente la acción $C_{A\leftrightarrow V}$, y, como consecuencia, errar en la conversión $C_{A\rightarrow V}$.

El 11% de estudiantes respondieron correctamente la pregunta 3. Las acciones que plantearon fueron: R_A, $C_{A\leftrightarrow G}$, PS_G, $C_{A\rightarrow G}$, $C_{G\rightarrow V}$, PS_V. Otro 6% respondió bien sin plantear alguna justificación o argumento. El 7% no respondió la pregunta. El 76% respondió incorrectamente, mostrando dificultades en la acción R_A. Esto se observa en la respuesta del estudiante 82:

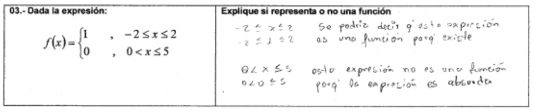

Gráfico 02. Respuesta del estudiante 82

El estudiante no discrimina adecuadamente entre variable independiente y dependiente. Esta dificultad en R_A, le lleva a efectuar la coordinación $C_{A\leftrightarrow V}$ de manera errónea y, como consecuencia, fallar en la conversión $C_{A\rightarrow V}$; con lo cual, la interpretación de la expresión dada es incorrecta. No recurre a las coordinaciones $C_{A\leftrightarrow G}$ y $C_{A\leftrightarrow T}$ como argumento para resolver el problema.

El 28% de estudiantes respondieron la pregunta 4 en forma correcta, haciendo uso de las acciones: R_G, $C_{G\leftrightarrow T}$, $C_{G\leftrightarrow T}$, $C_{G\rightarrow V}$, PS_V. El 5% respondió correctamente sin plantear argumento o justificación. El 11% no respondió la pregunta. El 56% respondió de manera incorrecta, observándose dificultades en la acción R_G, como el caso siguiente:

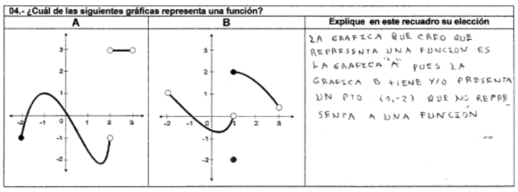

Gráfico 03. Respuesta del estudiante 36

La concepción que una función debe ser una curva y no un punto, muestra que el estudiante confunde la función con una de sus representaciones; en este caso la gráfica. La coordinación $C_{G\leftrightarrow T}$ que le permite identificar el punto (1,-2) no es bien utilizada en la justificación de su respuesta. Esta dificultad no le permite realizar de manera adecuada $C_{G\leftrightarrow V}$, por lo cual la conversión $C_{G\rightarrow V}$ que implica la interpretación de la gráfica, no es correcta.

El 3% respondió correctamente la pregunta 5. Sus respuestas se basaron en las acciones: R_G, R_A, $C_{G\leftrightarrow A}$, $C_{G\rightarrow A}$, PS_A. El 66% de estudiantes no respondieron la pregunta. El 31% respondió de manera incorrecta, observándose dificultades para efectuar R_G y R_A, como en el siguiente caso:

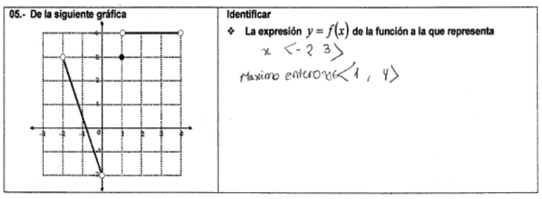

Gráfico 04. Respuesta del estudiante 14

El estudiante no identifica los elementos significativos del gráfico que le permitirán encontrar la expresión solicitada; solo se limita a buscar para cada parte de la gráfica, una función especial ya estudiada y conocida por él; que tenga gráfica similar. La coordinación $C_{G\leftrightarrow A}$, y, en consecuencia, la conversión $C_{G\rightarrow A}$, no se hacen adecuadamente, por lo cual el ajuste gráfico que requiere la identificación de la expresión $y = f(x)$ es incorrecto. Se observa el obstáculo relacionado a considerar que una función debe estar representada por una sola expresión algebraica. Una gráfica compuesta de diferentes partes se ve como varias funciones.

El 5% de los estudiantes respondieron correctamente la pregunta 6. Las acciones que siguieron fueron R_V, R_A, $C_{A\leftrightarrow V}$, $C_{V\rightarrow A}$, PS_A. El 18% no respondió la pregunta. El 77% respondió incorrectamente, mostrando dificultades en R_V y R_A, como se muestra en el siguiente caso:

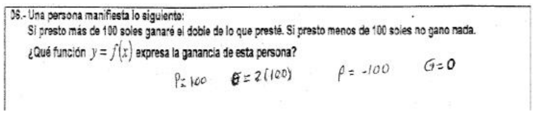

Gráfico 05. Respuesta del estudiante 67

El estudiante no identifica los elementos significativos del enunciado que le pueden permitir la construcción de la expresión $y = f(x)$ solicitada. Si bien se observa la noción de correspondencia, no hay una interpretación correcta de los términos "más de 100" y "menos de 100". Estas dificultades en R_V generan acciones erróneas en la coordinación $C_{A\leftrightarrow V}$ y en la posterior conversión $C_{V\rightarrow A}$; de manera que la modelización de la situación propuesta no es adecuada.

El 12% de los estudiantes respondieron correctamente la pregunta 7, efectuando las acciones R_T, R_A, $C_{T\leftrightarrow G}$ $C_{G\rightarrow A}$, $C_{T\rightarrow A}$, PS_A. El 13% respondió bien sin plantear argumento o justificación. Otro 13% no respondió la pregunta. El 62% no respondió bien la pregunta, observándose dificultades para efectuar las acciones R_T y R_A, como el siguiente caso:

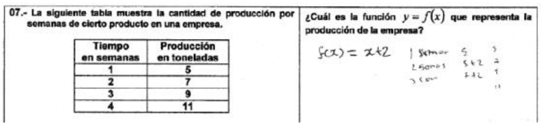

Gráfico 06. Respuesta del estudiante 52

Si bien, identifica la relación de dependencia entre las dos variables propuestas, el criterio de dependencia no es interpretado correctamente, ya que se confunde el valor de la pendiente con el término independiente de la expresión. Lo anterior genera errores en la coordinación $C_{T\leftrightarrow A}$ y en la conversión $C_{T\rightarrow A}$; con lo cual, el ajuste numérico necesario para identificar la expresión $y = f(x)$ no se efectúa correctamente. Muy pocos estudiantes recurren a la acción PS_G como apoyo a su respuesta.

El 18% de los estudiantes respondieron correctamente la pregunta 8. Las acciones que realizaron fueron: R_A, R_T, $C_{A\leftrightarrow T}$, $C_{A\rightarrow T}$. El 21% no respondió la pregunta. El 61% no respondió bien, mostrando dificultades para efectuar R_A, como se observa en el siguiente caso:

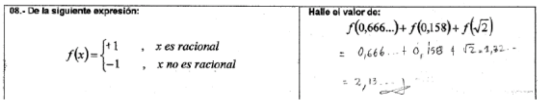

Gráfico 07. Respuesta del estudiante 25

Los valores 0,666…; 0.158 y $\sqrt{2}$ no se ponen en correspondencia con lo que plantea la expresión; solo procede como si $f(x)$ representará a la función identidad. Esta dificultad observada en R_A, no le permite realizar la coordinación $C_{A\leftrightarrow T}$ ni la conversión $C_{A\rightarrow T}$ de manera efectiva; por lo cual, el proceso de cálculo de valores solicitado no es el correcto.

El 1% respondió correctamente la pregunta 9, manifestando las acciones: R_G, $C_{G\rightarrow T}$, $C_{G\leftrightarrow T}$, PS_T. El 9% no respondió la pregunta. El 90% respondió de manera parcialmente correcta esta pregunta. Las dificultades que presentaron los estudiantes se relacionaron con la interpretación de los puntos abiertos en la gráfica. Esto les lleva a asignar imágenes a valores "x" que no forman parte del dominio, como en el caso de x = -3; y de manera similar, se asigna a un valor "x" una imagen que no le corresponde, como en el caso de x = 2. Estas dificultades genera errores en la conversión $C_{G\rightarrow T}$ y en la coordinación $C_{G\leftrightarrow T}$, con lo cual, la lectura de la gráfica es errada. Tal es el caso de la respuesta del siguiente estudiante:

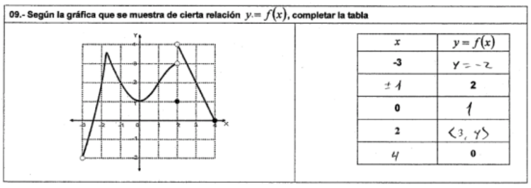

Gráfico 08. Respuesta del estudiante 44

DISCUSIÓN

El análisis de las preguntas del cuestionario reflejan las múltiples dificultades que enfrentan los estudiantes cuando tienen que llevar a cabo procesos de reconocimiento, coordinación y conversión de representaciones referidas al concepto de función.

En general, prevalece un aprendizaje basado en la representación algebraica, como lo evidencia el alto porcentaje de respuestas correctas en la pregunta 2; sin embargo, este aprendizaje solo le permite efectuar de manera efectiva procesos de tratamiento dentro de este registro y provoca problemas de coordinación con otras representaciones. Esto concuerda con lo señalado por Duval (9) quien plantea que una comprensión mono registro es una comprensión que no permite ninguna transferencia. Esto nos permite concluir que los estudiantes no han tenido muchos espacios que favorezcan la coordinación entre representaciones del concepto de función; con lo cual no han desarrollado la capacidad para discriminar las unidades significantes propias de cada representación y que permiten esta coordinación. La ausencia de esta capacidad en los estudiantes pone en evidencia la naturaleza didáctica de las dificultades que encuentran. Al mismo tiempo, se ha evidenciado que estas dificultades tienen naturaleza cognitiva. La concepción presente en los estudiantes que una función es una expresión algebraica o una ecuación o una gráfica, deja en claro las restricciones cognitivas que tienen los estudiantes y no favorece la coordinación entre representaciones.

El porcentaje de estudiantes que pueden identificar la condición principal para que una relación sea una función es apenas 6%. Además, a excepción de la pregunta 2, donde se obtuvo que el 62% de estudiantes respondieron correctamente; aproximadamente el 75% de los estudiantes mostraron dificultades para llevar a cabo coordinaciones entre las diferentes representaciones que afectaron a las procesos de conversión respectivos. Según Duval (8) la comprensión (integradora) de un contenido conceptual reposa en la coordinación de al menos dos registros de representación, y esta coordinación se manifiesta por la rapidez y la espontaneidad de la actividad cognitiva de la conversión. Esto nos lleva a concluir que la mayor parte de estudiantes no han logrado un aprendizaje integral del concepto de función.

Se encontró en el análisis de las respuestas de los estudiantes a las preguntas del cuestionario, el obstáculo de tipo epistemológico y didáctico referido a que una función no debe estar escrita usando varias expresiones, el cual había sido descrito por De la Rosa (5). Además, si bien algunos estudiantes pueden hacer conversiones de la representación algebraica a la gráfica, tabular o la verbal, la conversión inversa no es adecuada debido a la falta de identificación de las unidades significantes propias de dichos registros, lo cual se refleja en los altos porcentajes de respuestas incorrectas o no respondidas. Este tipo de obstáculo referido a la conversión de representaciones es descrito por Duval (9).

Los errores encontrados son similares a los descritos por Artigue (3). Entre ellos se pueden citar la incorrecta asociación entre función con una fórmula o una curva regular, así como evaluar si una expresión es una función en base a la similitud que esta pueda tener con otras funciones tipos.

AGRADECIMIENTOS
A los estudiantes de la Universidad Nacional Micaela Bastidas de Apurímac, por participar en este estudio.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Moreno M. El papel de la didáctica en la enseñanza del cálculo: evolución, estado actual y retos futuros. En: Maz A, Gómez B, Torralba M, editores. IX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Córdoba:

Universidad de Córdoba; 2005. pp. 81–96.

2. Eisenberg T. On the Development of a Sense for Functions, The Concept of Function, Aspects of Epistemology and Pedagogy. En: Harel G, Dubinsky E, editors. Washington DC: MAA; 1992. pp. 153-174.
3. Artigue M. La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En: Artigue M, Douady R, Moreno L, Gómez P, editores. Ingeniería Didáctica en educación Matemática. México DF: Grupo editorial Iberoamericana; 1995.
4. Evangelidou A, Spyrou P, Elia I, Gagatsis A. University Students Conceptions of Function. En: The 28th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Norway; 2004.
5. De la Rosa A. El concepto de función en secundaria: Conocer el grado de visualización de función lineal en el alumno, Experimentaciones en Educación Matemática en los Niveles Medio Superior y Universitario. En: Hitt F, Hernández G, editores. México DF: Cinvestav-IPN; 2000.
6. De la Rosa A. Errores e inconsistencias en la enseñanza del concepto de función en el docente: El grado de visualización. En: Memoria de la XVII Semana Regional de Investigación en Docencia en Matemática. Sonora: Universidad de Sonora; 2003.
7. Duval R. Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. México DF: Grupo Editorial Iberoamérica SA; 1998.
8. Duval R. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensé. En: Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. Strasbourg: IREM de Strasbourg; 1993.
9. Duval R. Semiosis y Pensamiento humano. Registros semióticos y Aprendizaje Intelectuales. Colombia: Universidad del Valle; 2004.
10. Duval R. Los problemas fundamentales en el Aprendizaje de las Matemáticas y las formas superiores del desarrollo cognitivo. Cali: Universidad del Valle; 1999. p. 44.
11. Mulhem G. Between the ears. Making inferences about internal proceses. En: Greer B, Mulhem G, editors. New Directions in Mathematics Educatios. Londrés: Routledge; 1989.
12. Socas M. Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. En: Rico L, editor: La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria. Barcelona: Horsori; 1997. pp. 125-154.
13. Selden A, Selden J. Terciary mathematics education research and its future. En: Holton D, editor: The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study. Netherlands: Kluwer Academic Publishers; 2001. pp. 237-254.

Correo electrónico:
alejandroecos2013@hotmail.com