Quintaesencia
Revista de Educación
ISSN 2076-5363 (en línea)

Quintaesencia [(2025), vol. 16, Núm. 2, pp 62 - 67]
DOI: https://doi.org/10.54943/rq.v16i2.719

## Artículo original

# Exploración y visualización de sólidos mediante secciones transversales: una aproximación con GeoGebra

# Exploration and Visualization of Solids through Cross-Sections: An Approach with GeoGebra

**Elizabeth Advíncula Clemente** [1, a]

**Nancy Saravia Molina** [2, b]

[1] Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas, Pontificia Universidad Católica del Perú.
[a] ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3941-3139
eadvincula@pucp.edu.pe

[2] Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas, Pontificia Universidad Católica del Perú.
[b] ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2819-8835
nsaraviam@pucp.edu.pe

**Información**

Recibido:18 de abril del 2025.

Aceptado: 08 de julio del 2025

**Palabras clave:**

Visualización; secciones transversales; cálculo integral; GeoGebra 3D.

**Resumen**

En cálculo integral, encontramos que la comprensión de sólidos tridimensionales definidos mediante secciones transversales constituye un reto significativo para los estudiantes universitarios. Esta dificultad se relaciona con limitaciones en la visualización espacial, en la articulación de distintos registros de representación, en la determinación de la función que corresponde al área de la sección transversal, entre otras. Una de las principales barreras cognitivas, detectadas en la literatura especializada, es la dificultad para imaginar el sólido generado por secciones transversales; lo que impide una comprensión profunda del cálculo del volumen de dicho sólido. El objetivo de este taller es usar el software GeoGebra como una herramienta que favorece la construcción, exploración y análisis de sólidos generados por secciones transversales elementales. El taller está dirigido a docentes de educación superior o futuros profesores de educación secundaria con especialidad Matemática. Se proponen actividades para que a partir de la manipulación de las herramientas que ofrece tanto GeoGebra 2D como 3D, los participantes construyan y visualicen dinámicamente la generación de los sólidos y, paralelamente, establezcan vínculos significativos entre los aspectos algebraicos, geométricos y gráficos implicados en el cálculo de volúmenes. Un resultado relevante es lograr la comprensión del sólido que se genera por secciones transversales, diferenciando claramente la forma de la base del sólido y de la sección transversal, determinando correctamente el área de la sección transversal, identificando los límites de integración para calcular su volumen, lo cual favorece el aprendizaje de los estudiantes.

**Information**

**Keywords**:

Visualization; cross sections; integral calculus; GeoGebra 3D.

**Abstract**

In integral calculus, we find that understanding three-dimensional solids defined by cross sections is a significant challenge for university students. This difficulty is related to limitations in spatial visualization, in the articulation of different registers of representation, in determining the function that corresponds to the cross-sectional area, among others. One of the main cognitive barriers identified in the specialized literature is the difficulty in imagining the solid generated by cross sections, which makes it difficult to have a deep understanding of the calculation of the volume of said solid. The aim of this workshop is to use the GeoGebra software as a tool to facilitate the construction, exploration, and analysis of solids generated by elementary cross sections. The workshop is aimed at higher education professors or future secondary school teachers with a minor in Mathematics. Activities are proposed so that, by manipulating the tools offered by both GeoGebra 2D and 3D, participants can dynamically construct and visualize the generation of solids and, at the same time, establish meaningful links between the algebraic, geometric, and graphical aspects involved in volume calculation. A relevant result is to manage to understand the solid generated by cross sections, clearly differentiating the shape of the base of the solid and the cross section, correctly determining the area of the cross section, and identifying the limits of integration to calculate its volume, which promotes learning in students.

# INTRODUCCIÓN

Se describe la problemática abordada, se presentan los trabajos en los que se basó la propuesta, se define el objetivo de aprendizaje considerado en la propuesta y se justifica su pertinencia. Se presenta la estructura a seguir en el desarrollo del taller.

En matemática, la comprensión de varios conceptos matemáticos requiere de la posibilidad de crear una imagen visual de un concepto abstracto. Es así como este taller tiene como objetivo mostrar actividades relacionadas con el volumen de sólidos por secciones transversales, que incorporan la visualización como mediadora en el proceso de enseñanza y aprendizaje a partir del uso de la tecnología.

En particular, en el curso de cálculo integral, cuando trabajamos volúmenes de sólidos por el método de secciones transversales observamos que una de las dificultades que presentan los estudiantes es la falta de visualización de los sólidos involucrados. Esto debido a diversas razones, pero en parte, dado que en las clases representamos o intentamos representar figuras tridimensionales en un plano como es la pizarra, lo que no permite a los estudiantes interactuar con los sólidos, ni descubrir sus características o propiedades.

Observamos que otra dificultad que presentan los estudiantes es encontrar la función que determina el área de la sección transversal, dado que no existe explícitamente un método para ello pues encontrar esta función depende de las condiciones dadas en el problema y de los conocimientos que se tengan. Esto se da debido a que no reconocen claramente la forma de la base del sólido ni la forma de la sección transversal, lo cual impide que establezcan relaciones correctas entre los elementos de las figuras involucradas.

Estas dificultades han generado diversas investigaciones en relación con el potencial didáctico de la visualización, lo que consideramos pertinente y sumamente necesario incorporar en el trabajo con conceptos matemáticos abstractos a fin de hacer visibles elementos que no se puedan percibir a simple vista. En este sentido, Di Domenicantonio et al. (2011) consideran "a la visualización como un proceso mental interno, el que puede utilizarse con efectividad para el descubrimiento y comprensión de nociones matemáticas que involucran sensación, imaginación y manipulación mental de los objetos" (p. 76).

A partir de la revisión de literatura especializada y convencidos de que la visualización de los sólidos facilita a los estudiantes la comprensión de dichas figuras, proponemos el uso de recursos tecnológicos como el GeoGebra en las clases, permitiendo a los estudiantes realizar construcciones e interactuar con ellas para facilitar la comprensión de ellos. El GeoGebra es un software libre que permite construir sólidos y manipularlos para visualizar sus principales características y propiedades. Cabe resaltar que este software cuenta con dos vistas, 2D y 3D, que favorecen la visualización y comprensión de la construcción de los sólidos.

En este taller presentamos actividades vinculadas a construcciones y exploración de sólidos generados por secciones transversales elementales como cuadrados, rectángulos, triángulos equiláteros e isósceles, semicírculos, entre otros; lo que favorece la comprensión de los sólidos y el cálculo de sus volúmenes por el método de integración por secciones transversales.

# MATERIAL Y MÉTODOS

**Elementos teóricos**

En esta parte describimos brevemente aspectos sobre la visualización y el uso del GeoGebra como instrumento mediador del aprendizaje, los cuales hemos considerado para el diseño de las actividades propuestas en el taller.

La visualización en el aprendizaje de las matemáticas viene siendo reconocida como una componente importante en la resolución de problemas, así como en la realización de demostraciones (Battista, 2007; Presmeg, 2006; Phillips et al., 2010).

Según Arcavi (2003) "la visualización es la capacidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre retratos, imágenes, diagramas, en nuestras mentes, en el papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas previamente desconocidas y comprensiones avanzadas" (p. 217). Coincidimos con esta definición pues en los problemas que nos interesa abordar en nuestro taller es muy importante contar con un esquema o representación gráfica que nos permita reconocer las características de los sólidos que se obtienen al seccionarlos usando distintas formas de secciones transversales y cómo estos cambios en las secciones transversales afectan los volúmenes de los sólidos en cuestión.

Desde el punto de vista de Duval (1999), la representación y la visualización son el centro de la comprensión en matemáticas, y por tal, es fundamental analizar en qué medida estos elementos interactúan para producir aprendizaje. Asimismo, señala que el uso de representaciones semióticas es esencial para acceder a los objetos matemáticos; cuya comprensión involucra distinguir un objeto de su representación. Duval (2016) también señala que la conversión requiere el uso interactivo de dos registros de representación semiótica o más, pero para garantizar la comprensión es necesaria la coordinación de representaciones formuladas en diferentes registros.

Asimismo, consideramos que el GeoGebra es un artefacto, que en términos de Rabardel (1995) podría convertirse en un instrumento a través de un proceso de génesis instrumental, el cual permite identificar los esquemas de utilización que construyen y movilizan los sujetos cuando interactúan con el GeoGebra al resolver problemas matemáticos, elaborar y verificar conjeturas. En este sentido, el GeoGebra facilita la visualización, el descubrimiento y el reconocimiento de propiedades invariantes en los objetos matemáticos involucrados (Madama & Curbelo, 2012) así como la comprensión de las características propias de los sólidos seccionados por distintas secciones transversales debido al dinamismo y flexibilidad que presenta este software para realizar construcciones y modificaciones.

Finalmente, el GeoGebra se constituye en un instrumento mediador del aprendizaje matemático al posibilitar la interacción entre distintas representaciones y favorecer la construcción de significados por parte de los estudiantes.

**Diseño**

El taller está dirigido a profesores de educación superior o a futuros profesores de educación secundaria con especialidad Matemática.

Las actividades propuestas tienen por objetivo que los participantes resuelven problemas relacionados con sólidos generados por secciones transversales, articulando aspectos algebraicos y geométricos que demanda la construcción de dichos sólidos, y reconociendo sus propiedades a partir de la exploración y manipulación de estos con apoyo de las herramientas del GeoGebra. Cada actividad también busca que los participantes reflexionen sobre el uso de la tecnología como recurso en la enseñanza y el aprendizaje de estos sólidos.

Este taller se desarrolló en una sesión de 3 horas, en un laboratorio, donde los participantes contaban con la instalación del GeoGebra en su computadora para desarrollar las actividades propuestas.

Cada problema se desarrolló de la siguiente manera:

- Trabajo individual (10 minutos): Cada participante resuelve el problema de manera individual con lápiz y papel.
- Trabajo en parejas (15 minutos): En pares los participantes comparan sus respuestas e intercambian estrategias de solución. También comparan sus soluciones con una dada por el chatGPT y comentan sobre la validez del procedimiento mostrado.
- Trabajo grupal (10 minutos): Todos los participantes comentan sobre las dificultades con la resolución de los problemas y sobre las dificultades que podrían tener sus estudiantes. Identifican las dificultades comunes y las particularidades que algunos manifiestan.

- Trabajo individual (20 minutos): Cada participante realiza la construcción del sólido generado en el problema que acaba de resolver con lápiz y papel. Se dan indicaciones para la construcción en GeoGebra interactuando entre las vistas 2D y 3D.
- Trabajo grupal (10 minutos): Todos los participantes comentan sobre las ventajas de realizar la construcción y manipulación del sólido en GeoGebra que permite comprender el sólido generado, identificando claramente la forma de la base y de la sección transversal, determinado el área de la sección transversal y los límites de integración para el cálculo del volumen. También se comparan con sólidos generados por ChatGPT.

A continuación, mostramos los problemas propuestos.

Problema 1. Calcule el volumen del solido cuya base es la región delimitada por la curva $y = \sqrt{x}$ y el eje $X$, entre $x = 0$ y $x = 4$, y cuyas secciones transversales perpendiculares al eje $X$ son cuadrados.

Problema 2. Calcule el volumen del solido cuya base es la región delimitada por la curva $x = \sqrt{4 - y^2}$, para $y \in [-2; 2]$ y el eje $Y$, y cuyas secciones transversales perpendiculares al eje $Y$ son semicírculos.

Problema 3: La base del sólido es un triángulo equilátero de lado $a$, y las secciones transversales son perpendiculares a una mediatriz de la base. Halle el volumen del sólido generado en tres casos diferentes según la forma de las secciones transversales:

a) Cuadrados con un lado contenido en la base del sólido.

b) Triángulos equiláteros con un lado contenido en la base del sólido.

c) Semicírculos con diámetro contenido en la base del sólido.

## RESULTADOS

A modo de ejemplo, se describe la implementación del problema 1.

En el trabajo individual inicial, los participantes desarrollaron el problema y obtuvieron respuestas diferentes.

En el trabajo en parejas, se dieron cuenta de sus errores e intercambiaron estrategias de solución. También compararon su respuesta con la del chatGPT y respondieron dos preguntas: ¿Qué opinan de la solución dada por chatGPT? ¿Qué dificultades tendrían sus estudiantes para resolver este problema?

En el trabajo grupal, los participantes comentan sobre las dificultades que tuvieron con el problema propuesto, señalando también las dificultades que podrían tener sus estudiantes. Entre las respuestas tenemos las siguientes:

- *Interpretan la sección cuadrada como la base del sólido y no como una sección transversal perpendicular a la base.*
- *No logran identificar el lado de las secciones transversales que son cuadrados.*
- *Presentan errores al expresar el área de las secciones transversales.*
- *No logran visualizar el sólido.*
- *Errores al determinar los límites de integración.*

En el segundo trabajo individual, cada participante realizó la construcción del sólido que corresponde al problema 1 siguiendo las indicaciones que mostramos a continuación.

*Construcción del sólido generado en el problema 1 usando GeoGebra*

1. Trace la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 4$.

En la barra de entrada escriba: Función$(\sqrt{x}, 0,4)$

2. Cree un deslizador, denominado a, tipo número, con intervalo de 0 a 4 e incremento 0.1.
3. Construya un cuadrado perpendicular al plano XY (perpendicular al eje X).

   En la barra de entrada escriba los siguientes puntos uno por uno:

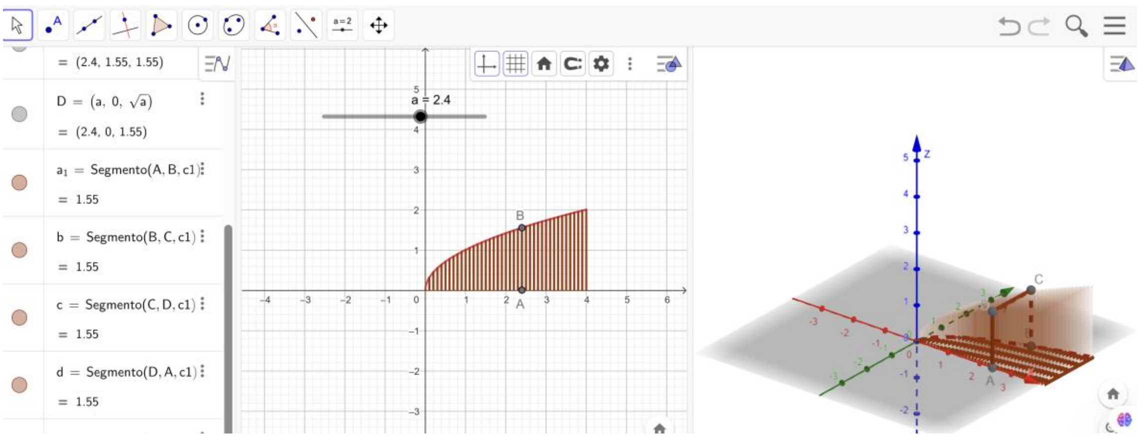
   $$A = (a,\ 0,\ 0) \quad B\ =\ (a, \sqrt{a},\ 0) \quad C = (a, \sqrt{a},\ \sqrt{a}) \qquad D = (a, 0,\ \sqrt{a})$$
4. Una los puntos $A$, $B$, $C$ y $D$ con la herramienta *Polígono* de GeoGebra 3D
5. Ubíquese en el segmento $\overline{AB}$ y haga click en el botón derecho del mouse, y en el cuadro que aparece elija la opción *Mostrar rastro.*
6. Ubíquese sobre la región *ABCD y* haga click en el botón derecho del mouse, y en el cuadro que aparece elija la opción *Mostrar rastro.*
7. Ubíquese sobre el deslizador a, haga click en el botón derecho del mouse y en el cuadro que aparece elija la opción *Animación*.

En el trabajo grupal final, los participantes mostraron construcciones similares a la que se muestra en la figura y comentaron sobre las ventajas de realizar la construcción. Por ejemplo, señalaron lo siguiente:

*Al manipular los sólidos pueden identificar los elementos que se necesitan para calcular el volumen de estos*.

**Figura 1**

*Construcción esperada para el sólido del problema 1*




Fuente: Elaboración propia.

## DISCUSIÓN

El uso de GeoGebra permite representar con claridad los sólidos generados a partir de distintas secciones transversales, posibilitando la identificación de semejanzas y diferencias entre ellos según sus propiedades geométricas. Las herramientas dinámicas del software facilitan la construcción y manipulación de estos sólidos, ofreciendo una visualización más precisa que la obtenida mediante procedimientos tradicionales con lápiz y papel. Esta interacción favorece una comprensión más profunda de las secciones transversales y contribuye a determinar con mayor facilidad la función que describe el área de dichas secciones.

Además, la integración de los aspectos geométricos y algebraicos en el análisis de los sólidos resulta esencial para el cálculo de su volumen, lo que refuerza la necesidad de emplear recursos digitales que apoyen este proceso. En este sentido, disponer de un espacio de reflexión sobre la incorporación de

GeoGebra en las clases es fundamental, pues garantiza que su uso responda a una intención pedagógica orientada a potenciar el aprendizaje de los estudiantes.

## REFERENCIAS


Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *52*, 215-241.

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. Lester, (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 843-908). Information Age Publising.

Di Domenicantonio, R., Costa, V., & Vacchino, M.C. (2011). La visualización como mediadora en el proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo Integral. *Unión - Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *27*, 75-87.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. In F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st Annual Meeting North American Chapter of the International Group of PME*, 3-26.

Duval, R. (2016). Un análisis cognitivo de problemas de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas. En Duval R. y Sáenz-Ludlow A. (Eds.), *Comprensión y Aprendizaje en matemáticas: Perspectivas Semióticas Seleccionadas*, Capítulo 2, pp. 61-94. Colombia.

Madama, M., & Curbelo, M. (2012). Visualizar, conjeturar y demostrar utilizando el software GeoGebra. *Acta de la Conferencia Latinoamericana GeoGebra*, 109-116.

Presmeg, N. C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 205-235). Sense Publishers.

Phillips, L.M., Norris, S.P., & Macnab, J.S. (2010). *Visualization in mathematics, reading and science education*. Springer.

Rabardel, P. (1995). *Los hombres y las tecnologías. Visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos*. Traducido por M. Acosta. Universidad Nacional de Santander. Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas.