Quintaesencia
Revista de Educación
ISSN 2076-5363 (en línea)

Quintaesencia [(2025), vol. 16, Núm. 2, pp 48 - 56]
DOI: https://doi.org/10.54943/rq.v16i2.717

Artículo original

Preálgebra y pensamiento algebraico en educación básica

Prealgebra and Algebraic Thinking in Basic Education

Ángel Gutiérrez [1, a]

[1] Universidad de Valencia, España
[a] ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7187-6788
angel.gutierrez@uv.es

Información

Recibido: 11 de abril del 2025.

Aceptado: 11 de julio del 2025.

Palabras clave:

preálgebra; problemas de patrones geométricos; educación básica; aprendizaje contextualizado.

Resumen

Presento, de manera experimental y práctica, una metodología de enseñanza en el contexto de la preálgebra y basada en los problemas de patrones geométricos. Los docentes, al resolver por sí mismos estos tipos de problemas, descubrirán cómo los conceptos principales del inicio de la enseñanza del álgebra van surgiendo de manera natural, contextualizada y significativa. Además, al llevar esta propuesta metodológica de enseñanza a sus aulas, podrán observar que ayuda a sus alumnos a iniciar el aprendizaje del álgebra y a superar las dificultades que se les presentan para comprender los significados del signo =, las letras o las ecuaciones. En este texto haré una introducción al preálgebra y el pensamiento algebraico; Después, analizaré la estructura de los problemas de patrones geométricos y sus objetivos de aprendizaje; en tercer lugar, presentaré ejemplos de respuestas de estudiantes, cuyo análisis mostrará la variedad de procesos de resolución posibles y la diversidad de estilos de respuestas, correspondientes a estudiantes que logran avanzar a diferentes ritmos en la comprensión de los conceptos algebraicos básicos.

Information

Keywords:

pre-algebra; geometric pattern problems; basic education; contextualized learning.

Abstract

Based on experimental and practical work, a teaching methodology is presented in the context of pre-algebra and based on geometric pattern problems. By solving these types of problems themselves, teachers will discover how the main concepts at the beginning of algebra teaching emerge naturally, contextually, and meaningfully. Furthermore, by bringing this teaching methodology into their classrooms, they will see how it helps their students begin learning algebra and overcome the difficulties they encounter in understanding the meanings of the = sign, letters, and equations. In this text, I will introduce pre-algebra and algebraic thinking. Next, I will analyze the structure of geometric pattern problems and their learning objectives. Third, I will present examples of student responses, whose analysis will show the variety of possible solution processes and the diversity of response styles corresponding to students who progress at different rates in their understanding of basic algebraic concepts.

INTRODUCCIÓN

Uno de los problemas a los que la educación matemática a dedicado más esfuerzos desde hace muchos años, tanto en investigación como en innovación, es el aprendizaje inicial del álgebra. El estudio del álgebra se inicia, dependiendo de los países, en los últimos cursos de la educación primaria o en los primeros de la educación secundaria.

En ambos casos, las metodologías más habituales propuestas en los currículos y libros de texto y puestas en práctica en las aulas realizan un inicio de los conceptos, significados y operaciones propios del álgebra desconectado de los conocimientos aritméticos de los estudiantes. Esto supone un cambio brusco de contexto matemáticos y la creación de un obstáculo epistemológico para los estudiantes, que son incapaces de entender los nuevos significados a los que se enfrentan, pues sus conocimientos aritméticos ya no son adecuados. Los estudiantes se encuentran ante un contexto que, a pesar de sus similitudes superficiales con la aritmética, conlleva un nivel de abstracción muy superior al de la aritmética; realmente, el inicio del aprendizaje del álgebra supone para los estudiantes la primera toma de contacto con la abstracción en matemáticas. A modo de ejemplo, el actual currículo de matemáticas de Educación Básica de Perú muestra este cambio de enfoque (Ministerio de Educación, 2017a, 2017b): en primaria y secundaria, el currículo plantea la competencia "resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio". En los grados 3º y 4º de primaria, esta competencia se operativiza proponiendo plantear problemas de equivalencias, regularidades o relaciones de cambio entre dos magnitudes, para traducirlas a igualdades aritméticas, mientras que en los grados 5º a 7º de primaria y 1º a 5º de secundaria, el currículo propone plantear problemas de regularidades entre magnitudes, traduciéndolas a expresiones algebraicas y ecuaciones o sistemas de ecuaciones.

Para prevenir y tratar de evitar el surgimiento de dicho obstáculo epistemológico, se pueden emplear metodologías de enseñanza que promuevan una continuidad entre la aritmética y el álgebra, de forma que los estudiantes realicen un paso continuo y pausado de un contexto al otro, aprovechando los conocimientos aritméticos. El objetivo central de estas metodologías es poner condiciones favorables para que los estudiantes aprendan a transformar poco a poco el lenguaje y los significados aritméticos en los nuevos lenguaje y significados algebraicos.

En este texto, presento de manera práctica una de estas metodologías, basada en la resolución de un tipo particular de problemas llamados *problemas de patrones geométricos* (PPG). Estos problemas presentan situaciones contextualizadas en las que, mediante una sucesión de cuestiones, se provoca en los estudiantes la necesidad de realizar generalizaciones de relaciones aritméticas para convertirlas, primero, en relaciones prealgebraicas y, después, en relaciones algebraicas expresadas simbólicamente. De esta manera, se logra que los estudiantes comprendan y aprendan los significados algebraicos abstractos de las letras, el nuevo significado del signo =, etc. El actual currículo de matemáticas de primaria de Perú parece proponer esta metodología cuando propone, en el desarrollo en el grado 5º de la competencia antes mencionada (Ministerio de Educación, 2017ª, p. 245): "Resuelve problemas de ... patrones de repetición que combinan criterios geométricos y cuya regla de formación se asocia a la posición de sus elementos. Expresa su comprensión del término general de un patrón ... usando lenguaje matemático y diversas representaciones."

MATERIAL Y MÉTODOS

Elementos teóricos

Para hacer explícito qué entendemos por *álgebra* en el contexto escolar, podemos guiarnos por NCTM (2008, p. 2): "El álgebra es un modo de pensamiento y un conjunto de conceptos y habilidades que permite a los estudiantes generalizar, modelizar y analizar situaciones matemáticas. El álgebra proporciona una forma sistemática para investigar relaciones, ayudando a describir, organizar y comprender el mundo."

Para ayudar al profesorado a gestionar el paso de la aritmética al álgebra, surgen dos constructos didácticos que articulan toda la actividad en las aulas: la preálgebra y el pensamiento algebraico. En las dos últimas décadas ha crecido el esfuerzo de los investigadores en educación matemática por explorar la enseñanza del álgebra en educación primaria. Así, surge el constructo de *preálgebra* (o *álgebra temprana*) como el "conocimiento algebraico, el pensamiento algebraico y las (ocasionalmente inusuales) representaciones y técnicas de estudiantes jóvenes al resolver problemas que uno generalmente esperaría que estudiantes más avanzados resolvieran usando notaciones algebraicas modernas" (Carraher y Schliemann, 2018, p. 108), de manera que se facilite la transición de la aritmética al álgebra.

La cita anterior sirve de introducción al otro constructo relacionado, el *pensamiento algebraico*. El pensamiento algebraico es uno entre los diferentes tipos de pensamiento matemático específicos que los estudiantes deben desarrollar a lo largo de la Educación Básica: pensamientos aritmético, geométrico, probabilístico, funcional y algebraico. Blanton y Kaput (2005, p. 413) describen el pensamiento algebraico como el "proceso en el cual los estudiantes generalizan ideas matemáticas a partir de un conjunto de casos particulares, establecen esas generalizaciones a través del discurso de la argumentación y las expresan en modos apropiados a la edad y cada vez más formales". Por tanto, el pensamiento algebraico no consiste en aprender reglas de resolución de ecuaciones, hacer cálculos con funciones, etc., sino en interpretar el significado de la información verbal o gráfica, establecer relaciones entre casos particulares y generalizarlas, manejar variables e incógnitas y representar todo ello de manera simbólica. Las principales características del pensamiento algebraico tienen que ver con la abstracción: generalización de relaciones, manejo analítico de objetos indeterminados y uso de un lenguaje simbólico. Estas características marcan la principal diferencia con el pensamiento aritmético, pues este es un modo de pensamiento concreto. Además, en la práctica, surgen diferencias como la diversidad de interpretaciones de las letras en álgebra (Küchemann, 1978), el significado del signo = (en aritmética indica que hay que hacer una operación y escribir el resultado a su derecha, mientras que en álgebra indica la igualdad de las dos expresiones escritas a sus lados) y las convenciones simbólicas de sus respectivos lenguajes.

Metodología de enseñanza

La propuesta que presento en este texto se inscribe en el contexto de la preálgebra y tiene como objetivo de aprendizaje el desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes que están a punto de hacer su primera tomade contacto con el álgebra. De manera concreta, la metodología de enseñanza se basa en la resolución de PPG, mediante una secuencia cuidadosamente organizada de problemas que guíen a los estudiantes en su camino hacia el desarrollo de su capacidad de generalización, la abstracción y la representación simbólica de propiedades y relaciones matemáticas. Un ejemplo de aplicación de esta metodología, que hemos desarrollado en los cursos 4º a 6º de educación primaria en España, está sintetizada en Arbona y otros (2017) y descrita con detalle en Arbona (2024).

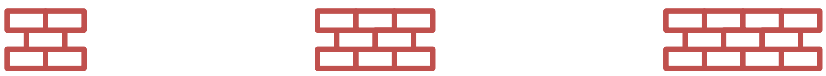
Matemáticamente, un PPG presenta, como datos, los primeros términos de una progresión numérica creciente de números naturales y pide calcular el término general de la progresión. La progresión puede variar en complejidad dependiendo de las características de los estudiantes y del momento del proceso de aprendizaje en el que se plantea el PPG; habitualmente son lineales (an), afines ($an + b$) y cuadráticas ($an^2 + bn + c$). La característica diferenciadora de los PPG es que los datos son una secuencia de representaciones gráficas, sin información numérica. La representación gráfica supone una ayuda inestimable para los estudiantes, pues pueden encontrar diferencias gráficas entre las figuras que muestran las relaciones aritméticas entre ellas y que les ayudan a generalizar y expresar correctamente esas relaciones, primero verbalmente y después algebraicamente.

La Figura 1 presenta un PPG que incluye todas las cuestiones que se plantean habitualmente. Estas cuestiones suelen recibir denominaciones específicas:

Figura 1

Enunciado y cuestiones que se plantean en los problemas de patrones geométricos

María está construyendo poco a poco una pared alrededor de su jardín.



Tamaño 1 Tamaño 2 Tamaño 3

a) ¿Cuántos ladrillos necesitará para construir una pared de tamaño 5? ¿Cómo lo sabes?

b) ¿Cuántos ladrillos necesitará para construir una pared de tamaño 11? ¿Cómo lo sabes?

c) ¿Cuántos ladrillos necesitará para construir una pared de tamaño 50? ¿Cómo lo sabes?

d) Explica a un amigo cómo puede calcular el número de ladrillos que tendrá la pared de un tamaño concreto.

e) ¿Cuántos ladrillos tendrá la pared de tamaño n? ¿Puedes encontrar una fórmula que exprese esta cantidad?

f) Si una pared tiene 38 ladrillos, ¿de qué tamaño es esa pared?

Arbona (2024)

Cuestión a): *término inmediato*. Se trata de un término que está muy cerca de los datos del problema. Esta proximidad fomenta que los estudiantes utilicen estrategias recursivas o de dibujo para calcular su valor.

Cuestión b): *término próximo*. Se trata de un término que está relativamente cerca de los datos del problema, pero bastante más alejado que el término inmediato. La mayor distancia hace que algunos estudiantes renuncien a calcular su valor mediante estrategias recursivas o de dibujo y que cambien a estrategias de tipo funcional o proporcional.

Cuestión c): *término lejano*. Se trata de un término que está muy alejado de los datos del problema. La distancia es suficientemente grande como para que muchos estudiantes consideren que es demasiado largo calcular el valor del término recursivamente o dibujando y pasen a usar estrategias de tipo funcional o proporcional.

Cuestión d): *generalización verbal*. Esta cuestión induce a los estudiantes a generalizar y expresar de manera verbal, pero abstracta, la relación que han aplicado en las cuestiones anteriores. Su objetivo es iniciar el desarrollo de la capacidad de generalización de los estudiantes. Por tanto, es necesario que los profesores dediquen tiempo a comentar con sus alumnos diferentes respuestas que hayan dado, para hacerles ver qué tipos de respuesta son más o menos adecuados.

Cuestión e): *generalización algebraica*. Esta cuestión va un paso más allá de la d), pues plantea expresar la generalización usando lenguaje algebraico. Supone el inicio de los estudiantes en el pensamiento algebraico. Como en la cuestión d), los profesores deben ser pacientes y dedicar el tiempo necesario a trabajar con sus alumnos para que entiendan y utilicen formas adecuadas de responder esta cuestión.

Cuestión f): *inversión*. Las cuestiones a) a c) piden calcular el valor del término de una posición concreta pero f) pide calcular la posición del término que tiene un valor concreto. Esto puede hacerse mediante la inversión de los cálculos aritméticos o, cuando los estudiantes hayan aprendido, resolviendo una ecuación. Una forma de verificar que los estudiantes han hecho una generalización correcta en las cuestiones anteriores y que la entienden es plantearles una cuestión en la que tengan que realizar razonamiento inverso; es necesario haber logrado una imagen global de cómo calcular el término general de la progresión para saber invertir correctamente las operaciones.

En la práctica, el profesor debe seleccionar parte de estas cuestiones, dependiendo del momento de aprendizaje en que se encuentren sus alumnos. Arbona (2024) presentó los diferentes conjuntos de cuestiones que planteábamos en nuestro estudio longitudinal con estudiantes de los grados 4º, 5º y 6º.

RESULTADOS

Análisis de respuestas de estudiantes

El análisis por los profesores de las respuestas de sus alumnos a los PPG puede hacerse solo mirando si las respuestas son correctas o erróneas, pero esto es un uso muy pobre de un tipo de problemas ricos y con diversos matices que permiten identificar diferentes detalles del proceso de aprendizaje de los estudiantes. A continuación presentaré varios puntos de vista para analizar las respuestas, con ejemplos y comentarios específicos de cada uno: formas de analizar los datos del PPG (cuestiones *a* a *c* y, en ocasiones, alguna cuestión posterior); formas de calcular los valores de términos dados (cuestiones *a*, *b* y *c*); formas de expresar la generalización, ya sea verbalmente (cuestión *d* y, en ocasiones, alguna cuestión anterior) o algebraicamente (cuestión *e* y, en ocasiones, alguna cuestión anterior); formas de calcular las posiciones de términos con valores dados (cuestión *f*). Esta metodología de análisis se basa en propuestas parciales de diversos autores (Stacey, 1989; Zapatera y Callejo, 2011; Fritzlar y Karpinski-

Siebold, 2012; García-Reche et al., 2015; Rivera y Becker, 2005), que nosotros hemos integrado y completado en Arbona (2024).

En primer lugar, es necesario tener en cuenta que no es razonable evaluar de manera independiente las respuestas a las sucesivas cuestiones de un PPG; una forma adecuada de proceder es, primero, leer la respuesta completa, para tener una visión global de la forma de razonar del estudiante y, después, volver a leer cada cuestión para sacar conclusiones específicas. Debe tenerse en cuenta que, con frecuencia, el motivo de la respuesta a una de las últimas cuestiones, y entender por qué ha respondido así el estudiante, se encuentra en las respuestas a cuestiones anteriores.

Formas de analizar los datos del PPG. Algunos estudiantes tienen en cuenta la estructura geométrica de las representaciones gráficas proporcionadas (*análisis geométrico de los datos*) para identificar partes de ellas que les permiten conectar la posición de cada figura con el tamaño de esas partes. La Figura 2 muestra la respuesta de un estudiante que ha considerado la pared dividida en tres filas de ladrillos y ha notado que la cantidad de ladrillos en la fila central coincide con la posición (5 ladrillos en el tamaño 5) y las cantidades de ladrillos en las otras filas son uno más que la posición. Otros estudiantes cuentan la cantidad total de ladrillos de cada figura (*análisis numérico de los datos*) y notan que cada tamaño tiene tres ladrillos más que el tamaño anterior, por lo que suman reiteradamente 3 ladrillos, hasta llegar al tamaño pedido (Figura 3).

Figura 2

Análisis geométrico de los datos del PPG (cuestión a)

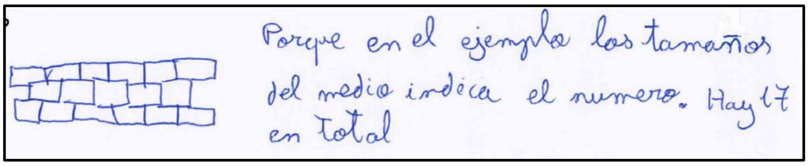
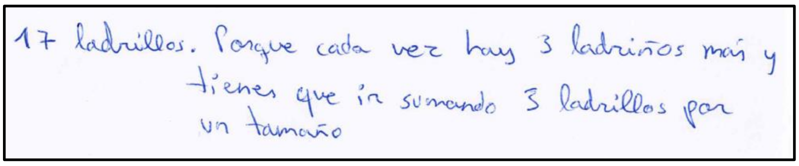


Figura 3

Análisis numérico de los datos del PPG (cuestión a)

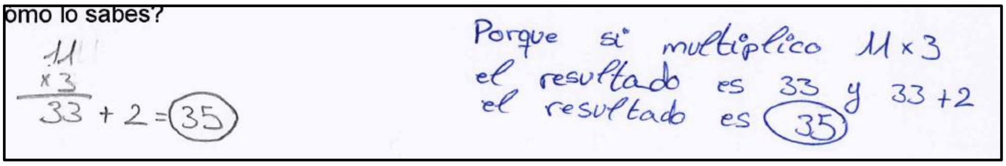


Formas de calcular los valores de términos dados. En las experimentaciones que hemos llevado a cabo para nuestra investigación sobre preálgebra y PPG, hemos encontrado cuatro formas de calcular los valores de los términos inmediato, próximo y lejano. El *conteo* consiste en dibujar el término solicitado y contar la cantidad de elementos que tiene el dibujo (Figura 2). El procedimiento *recursivo* consiste en calcular la diferencia entre los valores de un término y del siguiente y sumarla reiteradamente al valor de un término conocido, hasta llegar a la posición solicitada (Figura 3).

Los dos procedimientos anteriores son útiles para el término inmediato, pero a algunos estudiantes les resultan largos y aburridos para calcular el término próximo y la mayoría de los estudiantes los abandonan en el término lejano. Esto hace que los estudiantes con más capacidad matemática abandonen esas formas de cálculo y pasen a usar procedimientos multiplicativos. Así, aparece el procedimiento *funcional*, que se basa en convertir la suma reiterada de los procedimientos anteriores en un producto. La Figura 4 muestra la respuesta de un estudiante que, mediante un análisis geométrico, ha separado un ladrillo de cada una de las filas superior e inferior (dos en total) y ha considerado que la pared tiene tres filas con tantos ladrillos como el tamaño pedido más los dos ladrillos, por lo que ha multiplicado el valor del tamaño por 3 y sumado 2.

Figura 4

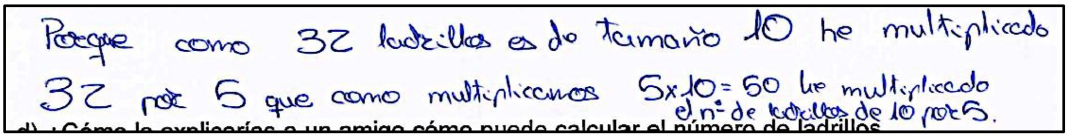
Cálculo funcional de la cantidad de ladrillos (cuestión b)



Algunos estudiantes aplican un razonamiento *proporcional* para relacionar los tamaños y las cantidades de dos términos de la sucesión. Esta forma de cálculo de cantidades es errónea salvo que se trate de una sucesión de tipo lineal (definida más arriba). La Figura 5 muestra la respuesta de un estudiante que relaciona los tamaños 10 (cuya cantidad de ladrillos había calculado en una respuesta anterior) y 50 (50 = 10×5) y aplica esa relación a sus cantidades de ladrillos (32×5).

Figura 5

Cálculo proporcional de la cantidad de ladrillos (cuestión c)

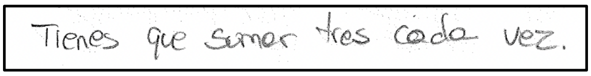


Formas de expresar la generalización. La cuestión d) es el elemento clave de los PPG, pues en ella se induce a los estudiantes a formular verbalmente la estrategia de cálculo que han empleado en las cuestiones a) a c). El profesor debe esperar aquí respuestas que reflejen las capacidades de generalización de sus alumnos, que pueden ser muy diferentes. La cuestión e) solo es adecuada para estudiantes que ya han avanzado bastante en su aprendizaje y son capaces de usar expresiones algebraicas. A continuación, me centraré en los tipos de respuestas que hemos obtenido en las cuestiones d) y e), siguiendo la propuesta de Radford (2006) de pasos en el progreso del aprendizaje de la forma de expresar las generalizaciones. Radford propuso un tipo de respuestas que realmente no son generalizaciones, denominado *inducción ingenua*; se trata de respuestas que plantean como generalización la descripción de estrategias de ensayo y error o recuento. Muestran que el estudiante sigue pegado a los ejemplos concretos y a las formas más básicas de cálculo, que no son aplicables a términos muy lejanos ni son generalizables.

Radford (2006) distinguió dos grandes estrategias de generalización, la aritmética y la algebraica, esta con varios tipos. La generalización *aritmética* es la estrategia de generalización más elemental que podemos considerar; consiste en describir un proceso recursivo para calcular el valor de cualquier término de la progresión (Figura 6). No obstante, esta es una forma inadecuada de generalización, pues aplicarla para calcular un término muy lejano es excesivamente lento (y aburrido), lo cual la hace inviable. Esta lentitud, que desmotiva a los estudiantes de aplicarlo, debe usarla el profesor como incentivo para inducir a sus alumnos a buscar otra forma mejor de operar.

Figura 6

Generalización aritmética (cuestión d)



El primer tipo de generalización algebraica (el más elemental) es la *algebraica factual*, que se basa en describir el procedimiento general de cálculo de valores de los términos mediante un ejemplo concreto (Figura 7).

Figura 7

Generalización algebraica factual (cuestión d) que necesitaría para construir un tamaño concreto de pared?

si el tamaño es tres en el medio habran 3 ladrillo y en los lado 1 más que el tamaño

La generalización *algebraica contextual* se caracteriza por descripciones verbales de cómo calcular el valor de un término cualquiera (Figura 8). A diferencia de la generalización algebraica factual, la contextual no se basa en ejemplos, sino que describe un procedimiento genérico de cálculo, que indica que el estudiante ya ha empezado a desarrollar su capacidad de generalización matemática abstracta.

Figura 8

Generalización algebraica contextual (cuestión d)

Cada vez le sumas tres pero el primer Tamaño hay 5 entonces tienes que multiplicar el tamaño por 3 y sumarle 2

El tipo superior de generalización algebraica propuesto por Radford (2006) es la generalización *algebraica simbólica*, que, como su nombre indica, consiste en expresar la generalización obtenida mediante una expresión algebraica simbólica. La Figura 9 presenta la respuesta de un estudiante que primero explica verbalmente los cálculos y después los representa mediante la fórmula correspondiente.

Figura 9

Generalización algebraica simbólica (cuestión d)

La fórmula es multiplicar el tamaño por 3 y luego sumar 2. $3n+2$.

Además de las generalizaciones contextuales y simbólicas de Radford (2006), en nuestras experimentaciones hemos encontrado con frecuencia respuestas que se sitúan entre ellas, pues incluyen una parte de tipo contextual y otra de tipo simbólico. Definimos la generalización *algebraica mixta* como aquella cuya expresión escrita está formada por la combinación de partes verbales y partes simbólicas, como la mostrada en la Figura 10.

Figura 10

Generalización algebraica mixta (cuestión d)

Que Tiene que multiplicar $\times 3$ el número que Te diga y después $+2$

Formas de calcular las posiciones de términos con valores dados (inversión). Cuando los estudiantes han aprendido a plantear y resolver ecuaciones, y responden sin dificultad a las cuestiones de inversión, han llegado al final del proceso de aprendizaje. Los que no han aprendido pueden resolver las cuestiones de inversión mediante cálculos aritméticos. El más adecuado es la *inversión correcta* de las operaciones que han realizado en las cuestiones a) a c): los estudiantes que dan respuestas como la de la Figura 4 pueden realizar los cálculos aritméticos aplicando las operaciones inversas a las anteriores en el orden contrario (Figura 11). Este procedimiento lleva asociado un método erróneo bastante frecuente, que consiste en invertir correctamente las operaciones, pero no realizarlas en el orden adecuado: en la cuestión f), calculan $38 \div 3 = 12$ (redondeando porque saben que el resultado tiene que ser un número entero) y $12 - 2 = 10$, en vez de calcular $38 - 2 = 36$ y $36 \div 3 = 12$.

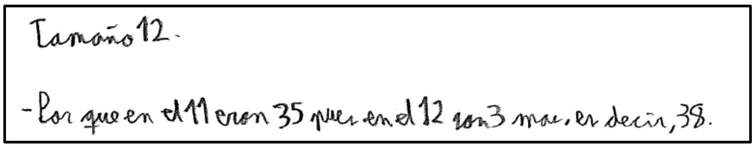
Algunos estudiantes a los que no se les ocurre invertir las operaciones recurren a otros procedimientos más rudimentarios, como el *tanteo y error*, que consiste en calcular la cantidad de ladrillos que hay en diversos tamaños; este procedimiento lleva a la solución cuando el estudiante realiza un tanteo y error organizado, es decir teniendo en cuenta al decidir el siguiente tanteo si la cantidad que acaba de calcular es mayor o menor que la cantidad dada en la cuestión. Otro procedimiento rudimentario consiste en realizar *cálculos recursivos* avanzando desde una posición cuyo tamaño conocen, hasta que alcanzan la cantidad dada (Figura 12).

Figura 11

Inversión correcta de las operaciones (cuestión f)

Figura 12

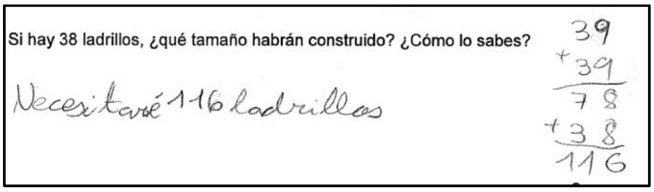
Cálculo recursivo del tamaño buscado (cuestión f)



Además, hay dos estrategias erróneas de respuesta a las cuestiones de inversión muy frecuentes, basadas en hacer *operaciones incorrectas*: una consiste en usar números inadecuados y la otra se debe a que el estudiante no ha entendido la cuestión y hace cálculos directos, como si pidiera la cantidad de ladrillos de un tamaño dado (Figura 13).

Figura 13

Cálculo erróneo del tamaño buscado por no invertir las operaciones (cuestión f)



DISCUSIÓN

En este texto he presentado las características principales del pensamiento algebraico y la preálgebra, constructos didácticos relacionados con la transición de la aritmética al álgebra y el aprendizaje inicial de los conceptos algebraicos. También he presentado los problemas de patrones geométricos (PPG) y he mostrado que son adecuados para su planteamiento en las aulas ordinarias, pues permiten a los estudiantes superar el obstáculo del paso del lenguaje aritmético al nuevo lenguaje algebraico y son adecuados para que los estudiantes con diferentes capacidades de generalización puedan avanzar a su ritmo, más o menos rápido, y llegar tan lejos como puedan en el aprendizaje del álgebra.

REFERENCIAS

Arbona, E. (2024). Estudio longitudinal del aprendizaje del álgebra temprana en Educación Primaria. Identificación de perfiles en estudiantes ordinarios y con altas capacidades matemáticas [Tesis doctoral, Universidad de Valencia]. Valencia, España. Disponible en https://roderic.uv.es/items/d063ee93-0349-4d89-90f7-2e1bb80fa0cc

Arbona, E., Beltrán Meneu, M. J., Jaime, A. y Gutiérrez, A. (2017). Aprendizaje del álgebra a través de problemas de patrones geométricos. *Suma*, *86*, 39-46.

Blanton, M. y Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412-446.

Carraher, D. W. y Schliemann, A. D. (2018). Cultivating early algebraic thinking. En C. Kieran (Ed.), Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: the global evolution of an emerging field of research and practice (pp. 107-138). Springer.

Fritzlar, T. y Karpinski-Siebold, N. (2012). Continuing patterns as a component of algebraic thinking - An interview study with primary school students. Texto para el 12th International Congress on Mathematical Education (ICME 12), Seul, Corea del Sur.

García-Reche, A., Callejo, M. L. y Fernández, C. (2015). La aprehensión cognitiva en problemas de generalización de patrones lineales. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), Investigación en Educación Matemática XIX (pp. 279-288). SEIEM.

Küchemann, D. (1978). Children's understanding of numerical variables. Mathematics in School, 7(4), 23-26.

Ministerio de Educación (2017a). Educación Básica Regular. Programa curricular de Educación Primaria. Ministerio de Educación de Perú.

Ministerio de Educación (2017b). Educación Básica Regular. Programa curricular de Educación Secundaria. Ministerio de Educación de Perú.

National Council of Teachers of Mathematics (2008). NCTM position statement on algebra: what, when, and for whom. *NCTM News Bulletin, 45*(5), 2.

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. En S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz y A. Méndez (Eds.), Proceedings of the 28th PME-NA Conference (Vol. 1, pp. 2-21). PME-NA.

Rivera, F. D., & Becker, J. R. (2005). Figural and numerical modes of generalizing in algebra. *Mathematics Teaching in the Middle School, 11*(4), 198-203.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalizing problems. *Educational Studies in Mathematics, 20*(2), 147-164.

Zapatera, A. y Callejo, M. L. (2011). Nivel de éxito y flexibilidad en el uso de estrategias resolviendo problemas de generalización de pautas lineales. En M. Marín, G. Fernández, J. L. Blanco y M. Palarea (Eds.), Investigación en Educación Matemática XV (pp. 599-610). SEIEM.