

## Artículo original

### Uso de medios tecnológicos para asistir una argumentación en matemáticas

### The Use of Technological Tools to Support Argumentation in Mathematics

Aitzol Lasa<sup>1, a</sup>

<sup>1</sup> Universidad Pública de Navarra, España

[aitzol.lasa@unavarra.es](mailto:aitzol.lasa@unavarra.es)

<sup>a</sup> ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7267-6614>

Información	Resumen
<p>Recibido: 11 de abril del 2025.</p> <p>Aceptado: 11 de julio del 2025.</p> <p><b>Palabras clave:</b></p> <p>GeoGebra; hoja de cálculo; inteligencia artificial generativa; medio material; resolución de problemas.</p>	<p>Este taller tiene por objetivo la discusión con docentes en activo y docentes en formación inicial en torno al uso del software de geometría dinámica, la hoja de cálculo y la inteligencia artificial generativa, como instrumentos para asistir procesos de resolución de problemas en contextos escolares. La metodología del taller es práctica y vivencial, por lo que se proponen una serie de problemas y se resuelven en grupo grande, de manera que a medida que se avanza en la resolución del problema se aclaran asimismo las nociones teóricas y didácticas subyacentes. De esta forma, la propia dinámica del taller aporta a los docentes estrategias de gestión de la actividad desde el punto de vista docente. Si bien el medio empleado en el taller es digital, este taller guarda relación con actividades previas realizadas en el COBISEMAT sobre papel. Así, la discusión permite relacionar y comparar los medios materiales “papel” y “software”, enriqueciendo la discusión en la dimensión mediacional. Las actividades se organizan siguiendo un planteamiento de “menú”, con actividades iniciales de motivación que sirven de “entrantes”, y actividades de desarrollo o “platos principales”. En función del apetito de los asistentes, se tienen también actividades adicionales “postre”; y para los más osados, se cuenta con una última tanda de actividades en la sección de “bebidas espirituosas”.</p>
Information	Abstract
<p><b>Keywords:</b></p> <p>GeoGebra; spreadsheet; generative artificial intelligence; material medium; problem solving.</p>	<p>The aim of this workshop is to discuss with in-service teachers and teachers in initial training about the use of dynamic geometry software, spreadsheets, and generative artificial intelligence as tools to assist problem-solving processes in school contexts. The methodology of the workshop is practical and experiential, so a series of problems are proposed to be solved in large groups, so that as the problem-solving process progresses, the underlying theoretical and didactic concepts are also clarified. This way, the dynamics of the workshop itself provides teachers with strategies for managing the activity from a teaching perspective. Although the workshop uses a digital medium, this workshop is related to previous activities carried out in COBISEMAT on paper. Thus, the discussion allows for the comparison and contrast of the material media of “paper” and “software”, enriching the discussion in the mediational dimension. Activities are organized according to a “menu” approach, with initial motivational activities serving as “starters” and development activities as “main courses”. Depending on the appetite of the participants, there are also additional “dessert” activities, and for the bolder ones, there is a final round of activities in the “alcoholic drinks” section.</p>

## INTRODUCCIÓN

En este taller se da continuidad a las actividades presentadas por el profesor Miguel R. Wilhelmi en el taller inicial “La geometría de una hoja de papel”, presentado en el VII Coloquio Binacional sobre Enseñanza de las Matemáticas COBISEMAT.

En aquel primer taller, el profesor presentó actividades para desarrollar la competencia geométrica y matemática sobre el medio material “hoja de papel”. En este mismo congreso se ha discutido en profundidad el efecto que tiene la elección del medio material en el desarrollo de la actividad matemática

escolar. Por ello, se retoman ahora algunas de aquellas actividades realizadas previamente con doblados de papel, marcas en papel, medidas no estándares sobre papel, etc., y se añaden algunas otras actividades para ver de qué manera se pueden hacer evolucionar el pensamiento geométrico y matemático con la introducción del medio material “software de geometría dinámica”, “hoja de cálculo”, o “inteligencia artificial generativa”.

Las actividades se clasifican a modo de menú, con unas actividades que sirven de “entrantes”, actividades que sirven de “plato principal”, actividades que sirven de “postre”, e incluso algunas otras que sirven de “bebidas espirituosas”. Veamos si somos capaces de saciar el apetito del participante al taller.

## MATERIAL Y MÉTODOS

### Consideraciones teóricas sobre el uso del software

Según Lasa y Wilhelmi (2013), los modelos dinámicos basados en GeoGebra se pueden clasificar, en función de sus características y de su utilidad, en modelos de *exploración*, de *ilustración* o de *demonstración*.

En primer lugar, la geometría dinámica ofrece la posibilidad de construir modelos explorativos para resolver un problema o una situación. A partir del modelo se infieren propiedades, hasta el momento desconocidas, de una figura geométrica o de una construcción. El objetivo consiste en diseñar una construcción que satisface las condiciones iniciales de un problema o de una situación. Tras manipular la construcción, los estudiantes deducen sus propiedades. Normalmente, estas construcciones no las realiza el estudiante, por el contrario, el docente diseña previamente la construcción o la toma de un catálogo de construcciones.

La exploración no es exclusiva de los modelos dinámicos. El software de geometría dinámica y otros softwares de carácter “lógico” tienen buena fama como instrumento de enseñanza, dado que organizan el medio material de manera ciertamente eficaz. Pero la elección de un medio material digital depende del tipo de tarea que se quiera realizar. Por ejemplo, en contextos esencialmente numéricos, y en aquellos contextos en los que aparezcan contenidos relativos al azar, la hoja de cálculo puede ser un instrumento útil e interesante.

En segundo lugar, se podría decir que el uso más extendido de la geometría dinámica consiste en ofrecer ejemplos de propiedades. En estos casos, se presenta una construcción que muestra la veracidad de una propiedad. Esta construcción sirve a modo de un modelo manipulativo que complementa el uso de una pizarra digital. Por ejemplo, para analizar las propiedades de un triángulo, el software dinámico genera toda una multitud de triángulos, en lugar de mostrar unos pocos en la pizarra ordinaria.

Este uso motiva la aparición de nuevos ejemplos que ayudan a mejorar la confianza de los estudiantes en la formulación de conjeturas. Una construcción *ilustrativa* es, en cierta manera, un “imagen” de la propiedad. Dado que, en la educación secundaria, el tiempo es oro, el docente puede tomar la decisión de ignorar la demostración formal de una propiedad, limitando la actividad a la presentación ilustrativa de la misma. Estas construcciones ilustrativas tienen sus propias características.

Finalmente, existen modelos dinámicos considerados “de demostración”. De manera tradicional, la demostración geométrica de una propiedad se realiza paso a paso en una pizarra ordinaria. Sin embargo, las pizarras digitales facilitan la implementación de software de geometría dinámica. Los modelos ilustrativos tienen la limitación de no estar pensados para mostrar los pasos de una demostración, y hay veces en los que los pasos computacionales difieren de la argumentación puramente lógica.

El docente debe seleccionar situaciones que presenten de manera conjunta un razonamiento inductivo (basado en el dinamismo del software) y un razonamiento deductivo (ligado al uso de lápiz y papel). Primero se deben presentar las demostraciones inductivas, porque los estudiantes prefieren las pruebas

pragmáticas a las intelectuales. Una prueba empírica mediante la manipulación de un modelo dinámico puede ser suficiente para el estudiante, porque puede construir una prueba empírica con un número reducido de intentos.

Por ello, los estudiantes no tienen la costumbre de probar un resultado y no sienten la necesidad de demostrar cada proceso matemático que emplean. En un entorno dinámico no hay necesidad de “axiomas” matemáticos: la ausencia de contraejemplos es prueba suficiente para convencerse de la veracidad de un enunciado. En este sentido, un modelo dinámico puede ser utilizado con el propósito de demostrar formalmente un resultado.

Llegados a este punto, cabe aclarar que la noción de “demostración” puede tener distintos significados. La demostración puede tener el significado de “explicación”, en tanto que una afirmación que clarifica una situación y la hace comprensible. Una demostración puede ser, también, un “argumento verbal”, es decir, un proceso de razonamiento con el objetivo de convencer. La demostración se puede entender, evidentemente, como una demostración matemática formal. Finalmente, se puede ver la demostración a modo de una “sistematización a posteriori”, en la cual se reorganizan una serie de resultados no relacionados en un principio entre sí.

La inteligencia artificial generativa (IAg) se puede considerar como otra herramienta en la gestión del proceso de resolución de un problema. Por ejemplo, se puede solicitar a la IAg la creación de un *procedimiento* que agilice la resolución de un paso determinado en un problema complejo. En estos casos, conviene coordinar la solución aportada por la IAg con la obtenida mediante otros medios digitales, para negar la IAg el *principio de autoridad*, y poder controlar así posibles “delirios” de la máquina, en términos de *triangulación metodológica* (Wilhelmi et al. 2021).

### Diseño de las actividades

A modo de “entrantes”, se presenta a los participantes al taller la siguiente primera tanda de actividades, que tiene por objetivo romper el hielo, sacarse la vergüenza y comenzar a participar sin miedo en el proceso de resolución de actividades:

1. Dado un segmento, construye un triángulo cuyos lados midan el doble y la mitad de ese segmento.
2. Construye un cuadrilátero que tenga sus cuatro lados de igual longitud.
3. Construye un pentágono que tenga sus cinco lados de igual longitud.
4. Construye un hexágono que tenga sus seis ángulos de igual amplitud

Estas actividades se han trabajado previamente sobre papel, en el taller “La geometría de una hoja de papel”. El interés de retomar las mismas actividades, es pues, el de discutir con los participantes al taller la resolución de una misma tarea mediante software de geometría dinámica, analizando el cambio que supone la sustitución del medio material en la actividad.

A continuación, se presentan las actividades que servirán de “plato principal”, y que suponen el cuerpo principal del taller. La primera tanda de actividades guarda relación con los *modelos de exploración*:

1. ¿Qué condiciones debe cumplir un triángulo para que sus tres mediatrices corten en un solo punto?
2. ¿Qué condiciones debe cumplir un cuadrilátero para que sus cuatro mediatrices corten en un solo punto?
3. Se tiene una cabra atada al extremo de una cuerda de 6 metros, a la pared de una caseta rodeada de verdes y deliciosos pastos<sup>1</sup>. La caseta es rectangular, y mide 5 metros de largo por 4 metros

---

<sup>1</sup> Enlace al modelo dinámico de exploración que asiste la resolución de este problema: <https://www.geogebra.org/m/sbbrqjvb>

de ancho. ¿A qué punto de la caseta se debe atar la cabra, para que ésta disponga de la mayor superficie posible de pasto?

En contextos esencialmente numéricos, o en aquellos en los que hay un componente relativo al azar, la *exploración* se puede realizar mediante una hoja de cálculo:

1. Modeliza el lanzamiento de un dado de seis caras.
2. Modeliza el lanzamiento de 200 dados, y contesta a las siguientes preguntas:
3. ¿Cuál es la probabilidad de que salga un 4 en el lanzamiento 145?
4. ¿Cuál es la probabilidad de que salga un 4 en alguno de los lanzamientos?
5. ¿Cuál es la probabilidad de que salga el mismo valor en los 200 lanzamientos?
6. En el examen de una oposición de maestro, hay 76 temas. El día del examen se eligen al azar 5 temas y cada candidato desarrolla un tema a su elección. Si un candidato a preparado 55 temas:
7. ¿Cuál será la probabilidad de que salga al menos un tema que haya preparado?
8. ¿Cuál será la probabilidad de que no se haya preparado ninguno de los cinco temas?

En ocasiones, se solicita al estudiante que argumente sobre una situación que puede contener *preguntas teóricas* o *cuestiones*. En estos casos, se puede contemplar la asistencia de la IAg para *indagar* en dicha resolución. Mediante la IAg, se puede generar un *procedimiento* potencialmente útil, que ayude a dilucidar una cuestión de tipo teórico; pero no hay que perder de vista que estos sistemas tienen cierta tendencia a “delirar”, por lo que todo procedimiento generado mediante “inteligencia artificial” se deberá comprobar a continuación mediante medios de “inteligencia natural”:

“Al realizar una compra, se ofrece un descuento del 10% a dicho producto, pero se requiere del pago de un 20% en impuestos. Se puede pagar el descuento primero, y luego pagar el impuesto; o se puede pagar primero el impuesto, y a continuación se puede aplicar el descuento. ¿Cuál es la opción más económica?”

Los “platos principales” cuentan también con ejemplos de actividades asistidas mediante *modelos de ilustración*. En estas actividades, los estudiantes siguen las indicaciones de un libro GeoGebra:

1. *La Conferencia Perdida de Richard Feynman*<sup>2</sup>. Richard Feynman (1918–1988) fue un físico célebre, entre otras muchas cosas, por su habilidad para dar conferencias científicas. Tenía la capacidad de adecuar sus explicaciones al nivel de maestría en física que tuvieran los participantes de la sala. A su vez, tenía fama de mostrar un gran entusiasmo en sus explicaciones. En el Instituto Caltech donde ejercía Feynman (ahí daba sus clases e investigaba), sus compañeros tenían la sana costumbre de grabar en magnetofón estas conferencias, para poder así transcribirlas en papel y poder utilizarlas a modo de texto, casi literal, con sus estudiantes de grado en física. Como apoyo a la grabación, se tomaban también fotografías de la pizarra donde Feynman desarrollaba sus diagramas. Sin embargo, las fotografías analógicas no siempre se han conservado correctamente. Tampoco se han conseguido guardar los apuntes y las anotaciones de las conferencias que él hacía a mano antes de cada sesión. La pregunta que emerge es sencilla y natural: ¿y si Feynman hubiera tenido a mano software de geometría dinámica para desarrollar sus conferencias?
2. *Bonus track*<sup>3</sup>. Se quiere dividir un círculo en cuatro partes iguales, utilizando líneas paralelas. Realiza la división a mano alzada sobre el papel. ¿Por dónde deben pasar las líneas? ¿Cuál será la superficie de las partes?

---

<sup>2</sup> Enlace al modelo dinámico de *ilustración* que asiste el problema (Lasa, 2015): <https://www.geogebra.org/m/wfjJKtBa>

<sup>3</sup> Enlace a los modelos dinámicos de *exploración* e *ilustración* que asisten el problema: <https://www.geogebra.org/m/nctdu54z>

Los *modelos de demostración* tratan de seguir los pasos lógicos de una demostración formal en una versión digital y visual:

“Demuestra que las tres medianas de un triángulo se cortan en un solo punto<sup>4</sup>. Este punto de denomina baricentro.”

## RESULTADOS

Cada participante dispone de su propio equipo informático. Las actividades se discuten primero en grupo grande, y se decide mediante el diálogo un primer esquema de resolución del problema sobre la pizarra. A continuación, se procede a la construcción del prototipo mediante software. El proceso de construcción se proyecta sobre la misma pizarra, de manera que información previa en la pizarra queda superpuesta, cuando así lo conviene, con la información proyectada mediante el software.

Durante la duración del taller, se consiguen desarrollar la totalidad de las actividades “entrantes” y “platos principales”. Sin embargo, el tiempo del taller expira sin llegar a discutir las actividades “postre” y “bebidas espirituosas”, que quedan en manos de los participantes para su libre ejecución.

## DISCUSIÓN

Los modelos dinámicos permiten la exploración y la ilustración de un problema o una situación (Lasa y Wilhelmi, 2013). Asimismo, el medio material tiene la potencialidad de facilitar el cambio de una teoría implícita a la argumentación susceptible de ser origen de obstáculos, por otra que limite la emergencia de argumentaciones falaces. En todo caso, la argumentación se basa en el estudio de un conjunto de casos finitos, sin que por ello la argumentación se pueda considerar inductiva (Lasa, Wilhelmi y Abaurrea, 2017).

## REFERENCIAS

- Lasa, A. & Wilhelmi, M.R. (2013). Use of GeoGebra in explorative, illustrative, and demonstrative moments. *Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo*, 2(1), 52-64.
- Lasa, A. (2015). Si Feynman hagués tingut GeoGebra. VII Jornades de l'Associació Catalana de GeoGebra, El nou GeoGebra: una solució per a cada usuari. 20 – 21 de febrer de 2015, Universitat Pompeu Fabra, Barcelona.
- Lasa, A., Wilhelmi, M. R. & Abaurrea, J. (2017). El problema de la argumentación: una aproximación desde el EOS. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M.M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en: [enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html](http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html)
- Wilhelmi, M. R., Belletich, O., Iribas, H., Abaurrea, J., Lasa, A. (2021). Triangulation en recherche qualitative à l'aide de l'analyse statistique implicative. En J.-C. Régnier, R. Gras, A. Bodin, R. Couturier et G. Vergnaud, *Analyse statistique implicative* 11, [<https://sites.univ-lyon2.fr/asi/11/index.php?page=16>]

---

<sup>4</sup> Enlace al modelo dinámico de *demostración* que asiste el problema: <https://www.geogebra.org/m/pz11B7rd>