

## Artículo original

# La capacidad de generalización matemática es un rasgo de estudiantes con alta capacidad matemática

## Capacity for mathematical generalization is a hallmark of mathematically gifted students

Ángel Gutiérrez<sup>1, a</sup>

<sup>1</sup> Universidad de Valencia, España

[angel.gutierrez@uv.es](mailto:angel.gutierrez@uv.es)

<sup>a</sup> ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7187-6788>

### Información

Recibido: 28 de marzo del 2025

Aceptado: 20 julio del 2025

### Palabras clave:

alta capacidad matemática; generalización matemática; educación básica; identificación de estudiantes.

### Resumen

Entre los estudiantes con necesidad de una atención educativa diferenciada se encuentran aquellos que muestran una capacidad de aprendizaje superior a la media. En este grupo están, en particular, los estudiantes con alta capacidad matemática. Entre las características diferenciadoras que muestra la literatura en educación matemática para los estudiantes con alta capacidad matemática se encuentra la capacidad de generalización. En primer lugar, caracterizaré la generalización matemática mostrando las diferentes formas como se presenta en el contexto de las matemáticas escolares: generalización de objetos, de relaciones, de operaciones y de métodos de resolución de problemas. Después, presentaré respuestas de estudiantes a varios problemas que requieren realizar generalizaciones, con el fin de mostrar cómo el análisis de estas respuestas muestra diferentes estilos de razonamiento y formas de realizar generalizaciones, que reflejan la diversidad de capacidades de generalización que tienen los estudiantes. Además, estos tipos de problemas son adecuados para ser planteados en grupos ordinarios de clase de matemáticas de diferentes grados de los centros escolares, por lo que son una herramienta a disposición de los profesores que les ayuda a identificar a sus alumnos con potencial de alta capacidad matemática.

### Information

### Keywords:

high mathematical ability; mathematical generalization; elemental education; student identification.

### Abstract

Among students who need differentiated educational attention are those who demonstrate above-average learning abilities. This group includes, in particular, students with high mathematical ability. Among the distinguishing characteristics identified in the literature on mathematics education for students with high mathematical ability is the ability to generalize. First, I will characterize mathematical generalization by showing the different ways it appears in the context of school mathematics: generalization of objects, relationships, operations, and problem-solving methods. Next, I will present students' responses to various problems that require generalization, in order to show how the analysis of these responses reveals different styles of reasoning and ways of generalizing, reflecting the diversity of generalization abilities among students. Furthermore, these types of problems are suitable for use in regular mathematics classes at different grade levels in schools, making them a tool available to teachers to help them identify students with high mathematical potential.

## INTRODUCCIÓN

Todos los sistemas educativos incluyen criterios para la identificación de estudiantes que tienen dificultades de aprendizaje y procedimientos para su atención diferenciada. Además, con frecuencia, aunque no siempre, los sistemas educativos incluyen también menciones a los estudiantes superdotados (en este texto emplearé el masculino genérico para aludir conjuntamente a niños y niñas o profesoras y profesores) y protocolos para su identificación y atención en los centros escolares. El procedimiento más habitual de identificación de los estudiantes superdotados (reconocido por la Organización Mundial de la Salud) es la administración de tests psicológicos de medición del cociente intelectual (CI) de los estudiantes. La distribución de los CI de los estudiantes se ajusta, estadísticamente y para la población global, a una curva normal (la conocida Campana de Gauss), en la que la media es  $CI = 100$  puntos y se considera estudiantes normales a los que tienen CI entre 85 y 115 puntos. Por otra parte, se considera estudiantes superdotados a los que tienen  $CI \geq 130$  puntos.

Entre los estudiantes considerados normales y los considerados superdotados, se encuentra un grupo de estudiantes cuyo CI está entre 115 y 130. Estos generalmente muestran una inteligencia superior a la de los estudiantes normales en una o unas pocas áreas escolares y se les suele denominar estudiantes con alta capacidad específica o con talento específico. En particular, los estudiantes con *alta capacidad matemática* (ACM) o *talento matemático* son aquellos que muestran una calidad de razonamiento matemático claramente superior a la de los estudiantes normales de su grado escolar o edad (Jaime y Gutiérrez, 2021), independientemente de que sean o no superdotados.

## MATERIAL Y MÉTODOS

### Características de la alta capacidad matemática

Se han realizado investigaciones en educación matemática cuyos resultados ponen de relieve diversas concepciones erróneas sobre las características de los estudiantes con ACM, principalmente:

Que los estudiantes con alto rendimiento académico en matemáticas (es decir, los que obtienen calificaciones excelentes en el centro escolar) tienen ACM. Esta relación no es cierta, pues hay bastantes estudiantes con ACM que no obtienen las mejores calificaciones en matemáticas; e inversamente, cuando las clases de matemáticas se basan casi exclusivamente en la memorización y resolución de ejercicios repetitivos, frecuentemente los estudiantes con mejor memoria son los que tienen mejores calificaciones en matemáticas.

Que los tests psicológicos de CI y psicométricos permiten identificar a los estudiantes con ACM. Esta afirmación tampoco es cierta, pues diversas investigaciones han mostrado que este tipo de instrumentos no evalúan realmente el razonamiento matemático y, por lo tanto, producen una cantidad significativa de falsos positivos y falsos negativos (Díaz y otros, 2008).

Las investigaciones de educación matemática muestran también que la mejor manera de identificar fiablemente a estudiantes con ACM es la resolución de problemas y la invención de problemas (denominado *problem-posing* en inglés). Por otra parte, varios investigadores han observado las formas de resolver problemas matemáticos de muestras de estudiantes y han llegado a caracterizar diversos aspectos de actividad matemática en los que destacan los estudiantes con ACM (recopiladas en Jaime y Gutiérrez, 2014). Entre estos aspectos podemos destacar la creatividad (Leikin y Lev, 2013), el razonamiento armónico (Krutetskii, 1976), la transferencia de conocimientos y estrategias, la mejora de procesos de resolución, la inversión de procesos matemáticos y la generalización. A esta última dedicaré este texto.

### La capacidad de generalización en matemáticas

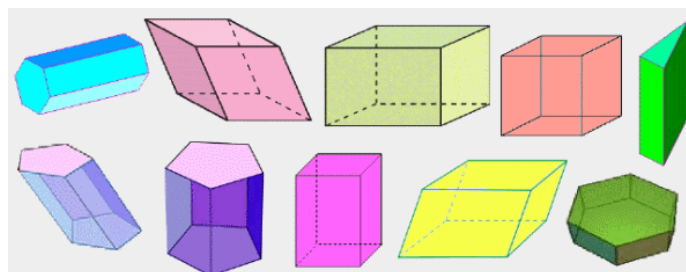
Krutetskii (1976) identificó la generalización como una de las principales actividades en matemáticas, la cual está presente en todos los niveles educativos, desde la educación infantil hasta el doctorado y la investigación de los matemáticos profesionales. Además, este autor considera que “los estudiantes con diferentes habilidades que son capaces de aprender matemáticas se caracterizan por diferencias en el grado de desarrollo de su habilidad para generalizar *material matemático*” (p. 84); más adelante,

Krutetskii especifica que dicho material matemático son *objetos, relaciones y operaciones*, que podemos encontrar en todos los niveles educativos y todas las áreas de las matemáticas escolares.

Respecto de la generalización de objetos matemáticos, en aritmética, está presente desde las primeras etapas del aprendizaje de los números, cuando los niños de educación infantil y primeros grados de educación primaria aprenden la estructura del sistema decimal de numeración (los números son objetos con una estructura específica): 10, 11, 12, 13, ..., 20, 21, 22, 23, ..., 30, 31, 32, 33, ..., 320, 321, 322, 323, ... Lo mismo ocurrirá en grados posteriores con las estructuras de los números decimales y las fracciones. En álgebra, al estudiar las ecuaciones, los estudiantes necesitan generalizar sus diferentes estructuras: lineales ( $3x + 2 = 11$ ), cuadráticas ( $5x^2 - 6x - 27 = 0$ ), etc. Algo similar ocurre al estudiar las familias de funciones. Los estudiantes deben usar su capacidad de generalización también en geometría; por ejemplo, al aprender el concepto de prisma, deben ser capaces de comparar diferentes tipos de prismas (Figura 1) para descartar los atributos irrelevantes (número de lados de las bases, inclinación, posición, tamaño, etc.) y generalizar las propiedades características.

**Figura 1**

*Generalización a partir de la diversidad de ejemplos de prismas*



En lo referente a generalización de operaciones, los estudiantes de primaria deben abstraer las características de cada tipo de operación numérica (suma, resta, multiplicación y división de números naturales), para ser capaces de realizar esas operaciones con diferentes cantidades de operandos, números de diferentes cantidades de cifras, etc. Pero también es necesaria la capacidad de generalización al pasar de los números enteros a los decimales, para identificar qué hay de común y de diferente entre las operaciones con uno u otros y, en educación secundaria, resulta de gran ayuda para los estudiantes que entiendan que las operaciones aritméticas con números naturales tienen la misma estructura que las correspondientes operaciones con polinomios (por ejemplo, la multiplicación, Figura 2).

**Figura 2**

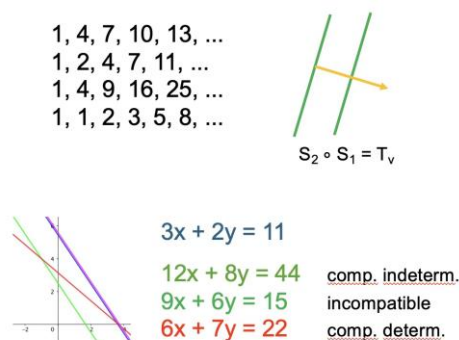
*Generalización del algoritmo de la multiplicación*

$$\begin{array}{r}
 247 \\
 \times 52 \\
 \hline
 494 \\
 1235 \phantom{0} \\
 \hline
 12844
 \end{array}
 \quad \longrightarrow \quad
 \begin{array}{r}
 2x^2 + 4x + 7 \\
 \times 5x + 2 \\
 \hline
 4x^2 + 8x + 14 \\
 10x^3 + 20x^2 + 35x \phantom{0} \\
 \hline
 10x^3 + 24x^2 + 43x + 14
 \end{array}$$

En cuanto a la generalización de relaciones, podemos encontrar numerosos contextos de las matemáticas escolares en los que es necesario este tipo de generalización (Figura 3): en aritmética (p. ej., al estudiar progresiones numéricas), en álgebra (p. ej., al estudiar los diferentes tipos de sistemas de ecuaciones), en geometría (p. ej., al estudiar las relaciones entre traslaciones, giros y simetrías), y en otros contextos.

**Figura 3**

*Generalización de diversas relaciones matemáticas*



Krutetskii (1976) también aludió a la generalización de *métodos de resolución de problemas*: hay familias de problemas matemáticos que comparten un mismo estilo de resolución, si bien es necesario adaptar dicho estilo a las características de la resolución de cada problema concreto.

Es necesario diferenciar entre familias de problemas cuyos métodos de resolución tienen ciertas similitudes (p. ej., porque comparten heurísticas de resolución) pero que también tienen diferencias significativas entre problemas concretos y grupos de problemas tipo cuya principal diferencia son los valores de los datos pero que se resuelven siguiendo siempre los mismos pasos. El segundo tipo de problemas, que realmente son simples ejercicios repetitivos (en el sentido de Pólya y Schoenfeld), son demasiado frecuentes en los libros de texto.

Un ejemplo de la generalización de métodos de resolución lo encontramos en la familia de los problemas verbales algebraicos que se resuelven mediante una ecuación o un sistema de ecuaciones. Lo común de su método de resolución es identificar dónde aparece(n) la(s) incógnita(s) en el texto del enunciado para, a continuación, tratar de escribir la(s) ecuación(es) incorporando la(s) incógnita(s) y los datos numéricos (la Figura 4 muestra un ejemplo de aplicación de este método). No obstante, entre los problemas verbales algebraicos que comparten este método de resolución, encontramos estilos muy diferentes de problemas, que requieren poner en práctica el método de maneras diferentes.

**Figura 4**

*Generalización de un método de resolución de problemas verbales algebraicos*

Antonio gastó  $\frac{1}{3}$  de sus ahorros para comprar un televisor. También gastó 2000 Soles en una mesa para el televisor. En total, Antonio gastó la mitad de sus ahorros. ¿Cuánto dinero había ahorrado Antonio?

Antonio gastó  $\frac{1}{3}$  de **X** para comprar un televisor. También gastó 2000 Soles en una mesa para el televisor. En total, Antonio gastó la mitad de **X**. ¿Cuánto dinero había ahorrado (**X**) Antonio?

$$X/3 + 2000 = X/2$$

## RESULTADOS

### Uso de la capacidad de generalización en la identificación de estudiantes con ACM

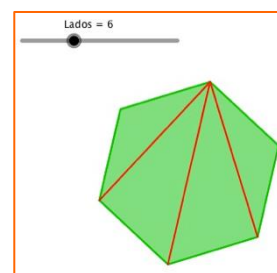
En este apartado voy a mostrar resoluciones de algunos problemas particulares, que han sido parte de investigaciones realizadas por el equipo de la Universidad de Valencia del que formo parte. Veremos respuestas de estudiantes que muestran claramente la diversidad de capacidades de generalización puestas en juego por los estudiantes. También veremos cómo algunas respuestas indican claramente una forma de razonamiento superior a la que cabe esperar de estudiantes medios y, por tanto, indicadora de ACM.

**Generalización de relaciones: descubrimiento del valor de la suma de los ángulos interiores de un polígono convexo.** Una propiedad que se estudia habitualmente en los cursos de geometría de los últimos grados de primaria o los primeros de secundaria, dependiendo del país, es la suma de los ángulos interiores de los polígonos convexos. Se empieza estudiando los casos de los triángulos y cuadriláteros

y, después, se completa con el estudio de la fórmula  $S = (n - 2) \times 180^\circ$  para un polígono convexo general de  $n$  lados. Habitualmente, los profesores y libros de texto presentan a los estudiantes la fórmula sin una justificación adecuada, pues solo pretenden que la memoricen y apliquen en ejercicios. Pero es más interesante plantear un problema que guíe a los estudiantes al *descubrimiento* de esta fórmula mediante un proceso inductivo (de generalización) a partir de casos concretos. Una posibilidad es el siguiente enunciado, que planteamos después de que los estudiantes han descubierto y aprendido que los ángulos interiores de los triángulos suman  $180^\circ$  (Benedicto, 2018):

1. Dibuja un cuadrilátero y traza una diagonal. ¿En cuántos triángulos queda dividido? ¿Cuánto suman los ángulos de un cuadrilátero?
2. Dibuja un pentágono y traza las diagonales desde un solo vértice. ¿En cuántos triángulos queda dividido? ¿Cuánto vale la suma de los ángulos de un pentágono?
- 3a. Observa los polígonos en el computador. Completa la tabla calculando la suma de los ángulos de cada polígono.

POLÍGONO	NÚMERO LADOS	NÚMERO TRIÁNGULOS	SUMA ÁNGULOS INTERIORES
TRIÁNGULO			
CUADRILÁTERO			
PENTÁGONO			
HEXÁGONO			
HEPTÁGONO			
P. DE 20 LADOS			
P. DE $n$ LADOS			



- 3b. ¿En cuántos triángulos se puede dividir un polígono de 20 lados trazando las diagonales desde un vértice? ¿Cuánto vale la suma de sus ángulos?
- 3c. ¿En cuántos triángulos se puede dividir un polígono general de  $n$  lados trazando las diagonales desde un vértice? ¿Cuánto vale la suma de sus ángulos?

Los apartados 1 y 2 se resuelven con la ayuda de instrumentos adecuados de dibujo que ayuden a obtener resultados exactos. Para el apartado 3a, proporcionamos a los estudiantes una construcción de Geogebra que muestra los polígonos de 3 a 12 lados con sus diagonales desde un vértice, con el fin de evitar que tengan que dibujar los polígonos hasta el heptágono para completar la tabla. Sin embargo, esta construcción no les permite observar el polígono de 20 lados (pregunta 3b), por lo que esperamos que, para responder esta pregunta, los estudiantes tengan que realizar una generalización de los resultados anteriores, ya escritos en la tabla, al polígono de 20 lados. Análogamente, la pregunta 3c solo se puede resolver correctamente si los estudiantes son capaces de realizar una nueva generalización de los valores mostrados en la tabla, esta vez a un polígono general de  $n$  lados.

Un análisis de los requisitos de razonamiento matemático de la secuencia de preguntas nos muestra claramente que las preguntas 1, 2 y 3a están al alcance de todos los estudiantes, incluso de aquellos con dificultades de comprensión de las matemáticas, pues las preguntas les guían indicándoles los pasos concretos que deben dar: dibujar con cuidado, contar la cantidad de triángulos formados y multiplicar por  $180^\circ$ . Sin embargo, las preguntas 3b y 3c son abstractas (es improbable que los estudiantes intenten dibujar un polígono de 20 lados y sus diagonales desde un vértice) y obligan a pensar en un caso concreto (3b) y después en el caso general (3c). Por ello, 3b requiere un razonamiento más complejo que las preguntas anteriores y, análogamente, 3c es más compleja que 3b.

En resumen, este problema ofrece la posibilidad de que los estudiantes con dificultad para las matemáticas (o con poco interés) puedan responder las preguntas 1, 2 y 3a mientras sus compañeros





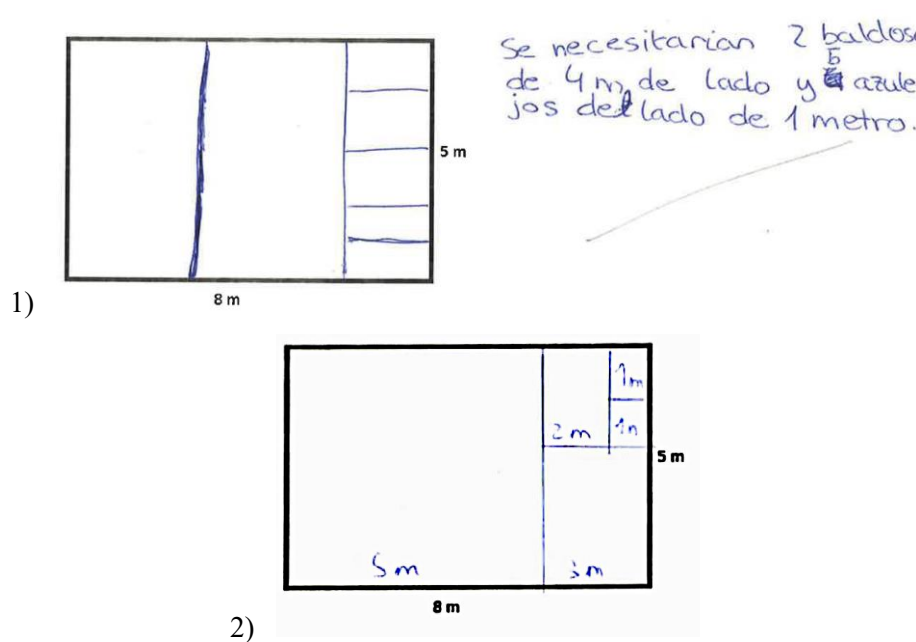
vértice, contar la cantidad de triángulos, etc.) y su objetivo era generalizar la relación entre la cantidad de lados y el valor de la suma de los ángulos. Por el contrario, en el segundo problema, el objetivo es generalizar un procedimiento óptimo de resolución (que se presenta ejemplificado al comienzo del enunciado), es decir un procedimiento que lleve al cubrimiento óptimo de cualquier rectángulo con baldosas de cualesquiera dimensiones, que varían en cada apartado.

El análisis de las respuestas se tiene que centrar en identificar el grado de generalización logrado por los estudiantes del procedimiento de embaldosado óptimo. Los apartados a), b) y c) presentan tres situaciones diferentes cuyas respuestas permiten observar el progreso llevado a cabo por el estudiante (o la falta de él) en el proceso de generalización. Así, la Figura 6 presenta dos respuestas al apartado a). La respuesta 6.1 muestra que el estudiante no ha entendido el enunciado, pues ha hecho un cubrimiento cuyas baldosas no cumplen las condiciones, ya que la suma de las longitudes de las baldosas en horizontal es 9 m y las baldosas cuadradas de 4m no pueden cubrir completamente el alto del rectángulo. Por el contrario, la respuesta 6.2 es correcta y muestra que el estudiante ha iniciado el proceso de generalización (a falta de confirmar en los apartados siguientes si realmente lo ha logrado).

la Figura 7 presenta dos respuestas al apartado b). La respuesta 7.1 corresponde a un estudiante que sigue sin entender el enunciado y sin iniciar el proceso de generalización, pues ha hecho un cubrimiento cuyas baldosas no cumplen las condiciones. Sin embargo, la respuesta 7.2 es correcta y muestra que el estudiante ha completado el proceso de generalización, pues ha sido capaz de adaptar la estrategia de cubrimiento a las nuevas condiciones.

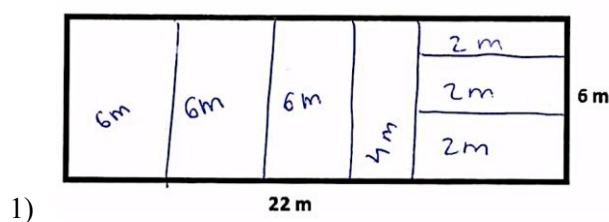
**Figura 6**

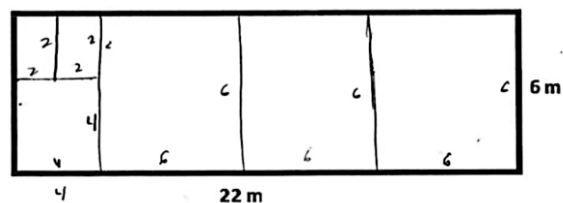
*Respuestas al apartado a)*



**Figura 7**

*Respuestas al apartado b)*



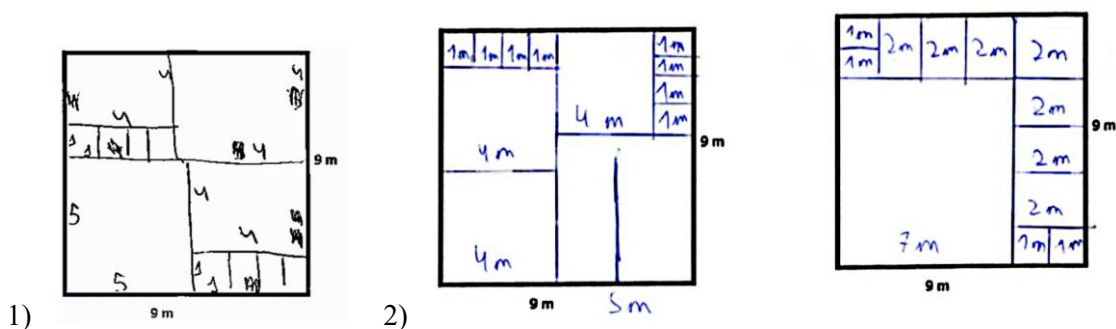


2)

Finalmente, la Figura 8 muestra dos respuestas al apartado c). En la respuesta 8.1 apreciamos que el estudiante ha iniciado correctamente el procedimiento de cubrimiento, utilizando las baldosas más grandes posibles (de lados 5 m y 4 m; aquí no usó la baldosa de lado 7 m porque ya la había utilizado en el otro cubrimiento del cuadrado), pero no fue capaz de seguir aplicando el procedimiento de cubrimiento en los huecos más pequeños, pues no se da cuenta de que las baldosas del borde superior suman 8 m y las baldosas del borde izquierdo suman 10 m. Por lo tanto, podemos concluir que este estudiante ha sido capaz de realizar una generalización parcial del procedimiento. La respuesta 8.2 corresponde a otro estudiante que sí ha generalizado completamente el procedimiento de cubrimiento, pues lo ha aplicado correctamente para hacer los dos cubrimientos diferentes solicitados.

**Figura 8**

*Respuestas al apartado c)*



Como vemos, este problema permite diferenciar a los estudiantes con menor y mayor capacidad de generalización: algunos estudiantes realizan cubrimientos adecuados, demostrando que han logrado abstraer y generalizar la característica central del procedimiento de cubrimiento (que es utilizar siempre las baldosas más grandes posible) y aplicarla de manera consistente a lo largo de los apartados; otros estudiantes no han realizado cubrimientos correctos, por lo que no han logrado abstraer la característica central del procedimiento de cubrimiento. También podemos encontrar estudiantes que muestran haber logrado abstraer dicha característica del procedimiento de cubrimiento, pero no han logrado generalizarla totalmente, pues la han aplicado bien en unos apartados, pero solo parcialmente bien en los otros, al haber cometido algunos errores locales. Por lo tanto, este problema es adecuado para plantearlo en clases ordinarias y permitirá al profesor identificar a sus alumnos que muestran mayor capacidad de generalización y que tienen una característica típica de los estudiantes con ACM.

## DISCUSIÓN

Para identificar fiablemente a estudiantes con ACM, es necesario observar su actividad de resolución e invención de problemas y hacerlo en las diferentes áreas de las matemáticas, para poder evaluar las formas de uso de diferentes capacidades y habilidades matemáticas por los estudiantes.

Una de las principales capacidades matemáticas es la capacidad de generalización. Su observación, evaluación y desarrollo debe ser objetivos de cualquier curso de matemáticas. Los estudiantes con ACM suelen mostrar un mayor desarrollo de esta capacidad respecto a sus compañeros de grado o edad.

En la segunda parte de este texto he mostrado ejemplos de dos tipos de problemas cuyas respuestas permiten observar y evaluar diferentes estrategias de generalización empleadas por los estudiantes. Algunas de las estrategias que he mostrado, así como otras descritas en la literatura de educación matemática, se evidencian como típicas de estudiantes con baja capacidad de generalización, mientras que otras estrategias son típicas de estudiantes con ACM.



Parte de la información presentada en esta publicación se refiere a resultados de investigaciones realizadas en el marco del proyecto de investigación *Aproximación multidimensional a la atención a estudiantes con alta capacidad matemática* financiado por la Agencia Española de Investigación del Ministerio de Ciencia e Innovación (PID2020-117395RB-I00, MCIN/AEI/10.13039/501100011033).

## REFERENCIAS

- Benedicto, C. (2018). *Diseño y aplicación de un instrumento para valorar la demanda cognitiva de problemas de matemáticas resueltos por estudiantes de enseñanza obligatoria. El caso de las altas capacidades matemáticas* [Tesis doctoral, Universidad de Valencia]. Valencia, España. Disponible en <http://roderic.uv.es/handle/10550/66468>
- Díaz, O., Sánchez, T., Pomar, C. y Fernández, M. (2008). Talentos matemáticos: análisis de una muestra. *Faisca*, 13(15), 30-39.
- Jaime, A. y Gutiérrez, A. (2014). La resolución de problemas para la enseñanza a alumnos de educación primaria con altas capacidades matemáticas. En B. Gómez y L. Puig (Eds.), *Resolver problemas. Estudios en memoria de Fernando Cerdán* (pp. 147-190). PUV.
- Jaime, A. y Gutiérrez, A. (2021). La alta capacidad matemática: caracterización, identificación y desarrollo. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 24(3), 597–621.
- Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. The University of Chicago Press.
- Leikin, R. y Lev, M. (2013). Mathematical creativity in generally gifted and mathematically excelling adolescents: what makes the difference? *ZDM Mathematics Education*, 45(2), 183-197. <https://doi.org/10.1007/s11858-012-0460-8>
- Mora, M., Ramírez, R., Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2024). Traits of generalization of problem solution methods exhibited by potential mathematically gifted students when solving problems in a selection process. *ZDM – Mathematics Education*, 56(6), 1257-1272. <https://doi.org/10.1007/s11858-024-01625-4>