

Artículo original

La argumentación en matemáticas

Mathematical Proof and Reasoning

Aitzol Lasa Oyarbide^{1, a}

¹ Universidad Pública de Navarra, España

^a ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7267-6614>

aitzol.lasa@unavarra.es

Información

Recibido: 15 de marzo del 2025

Aceptado: 25 de julio del 2025

Palabras clave:

Enfoque ontosemiótico;
argumentación; teoría
implícita de referencia;
medio material;
aprendizaje basado en la
indagación.

Information

Keywords:

Ontosemiotic approach;
argumentation; implicit
theory of reference;
material medium;
inquiry-based learning.

Resumen

En esta conferencia se tratan algunos aspectos de la noción de *argumentación* en la actividad matemática escolar. Se parte de una breve descripción normativa, teórica y didáctica de la noción de argumentación, que justifica la necesidad de ampliar el espectro de clasificación habitual de los argumentos en *inductivos* y *deductivos*. De hecho, se puede afirmar que la argumentación escolar contempla el estudio de un conjunto finito de casos, cuyas conclusiones trascienden la categoría de meros ejemplos, por la existencia de una *teoría implícita* de referencia. La elección del *medio material* tiene también consecuencias en las características de la argumentación. A continuación, se discute la potencialidad que tiene la argumentación como elemento que articula situaciones de aprendizaje de las matemáticas que sean transversales a otros ámbitos de conocimiento. Se aportan una serie de situaciones-tipo de la etapa de la educación secundaria que sirven de ejemplo, clasificados en función de ámbitos de conocimiento, y se termina con unas consideraciones finales a modo de conclusión, en los que se discuten la dimensión *cognitiva*, *interaccional* y *epistémica*.

Abstract

This conference addresses some aspects of the concept of *argumentation* in school mathematics. It starts with a brief normative, theoretical, and didactic description of the concept of argumentation, which justifies the need to broaden the usual classification of arguments into *inductive* and *deductive*. In fact, it can be said that school argumentation involves the study of a finite set of cases, whose conclusions transcend the category of mere examples, due to the existence of an *implicit theory* of reference. Choosing the *material medium* also has consequences for the characteristics of argumentation. Next, it is discussed how argumentation has the potential of being an element that articulates mathematics learning situations that are transversal to other areas of knowledge. Then, a series of typical situations from secondary education are provided as examples, classified according to areas of knowledge, and to conclude, some final considerations are given in which the *cognitive*, *interactional*, and *epistemic* dimensions are discussed.

INTRODUCCIÓN

Las normas y leyes que rigen el sistema educativo no están exentas del fenómeno de obsolescencia (Brousseau, 1998), y padecen variaciones periódicas que las hacen evolucionar en el sentido que marcan las corrientes pedagógicas y metodológicas instaladas en el momento. La manera en la que la enseñanza de las matemáticas se refleja en dichos textos curriculares también sufre esta influencia.

Por ejemplo, el Boletín Oficial de Navarra (2015, 44) indica lo siguiente sobre la argumentación en matemáticas: “Las matemáticas contribuyen de manera especial al desarrollo del pensamiento y razonamiento, en particular, el pensamiento lógico-deductivo y algorítmico, al entrenar la habilidad de observación e interpretación de los fenómenos, además de favorecer la creatividad o el pensamiento geométrico-espacial” (BON, 2015, 44).

Es decir, vemos que el currículo de matemáticas destaca el aspecto deductivo de la argumentación matemática, aun cuando esta manera de razonar es minoritaria en el conjunto de las etapas educativas pre-universitarias. De hecho, durante las etapas de la Educación Primaria y de la Educación Secundaria Obligatoria, la argumentación escolar es principalmente inductiva tanto en el ámbito de las ciencias naturales y experimentales, como en el ámbito matemático.

MATERIAL Y MÉTODOS

Argumentación y didáctica de la matemática

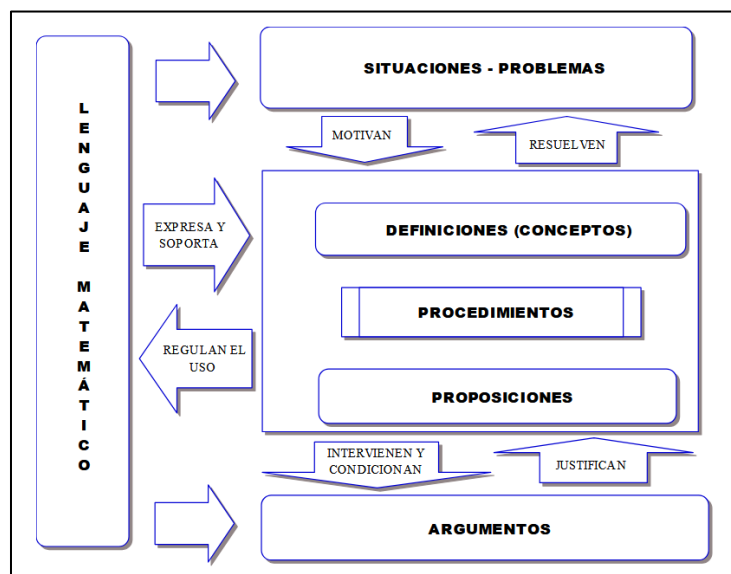
Los textos legales y curriculares, si bien necesarios para articular el sistema educativo, no bastan para caracterizar los objetivos de aprendizaje en cada una de las etapas. Para la correcta aplicación de las normas oficiales, se requiere asimismo de conocimientos de las didácticas específicas de cada ámbito.

En el caso de las matemáticas, el Enfoque ontosemiótico (EOS) ubica los *argumentos* dentro de los objetos matemáticos primarios que articulan la actividad matemática, junto con el *lenguaje* empleado, los *conceptos* o las nociones movilizadas, el tipo de *situaciones* o problemas en los que se aplica, las *proposiciones* o teoremas que emergen del proceso, y los *procedimientos* empleados (Godino et al, 2007; Godino, 2024).

Los *argumentos*, según el EOS, serían enunciados que tienen por objetivo explicar, verificar o justificar la validez de proposiciones y de procedimientos. Se emplean de manera pragmática en función de su utilidad y de su interés en contextos de resolución de problemas o de resolución de una situación.

Figura 1

Configuración de objetos primarios.



Godino, Batanero y Font (2007).

La elección de un *medio material* influye también sobre las características, usos y funciones de la argumentación (Lasa, 2016). Por ejemplo, si la actividad matemática se desarrolla sobre un medio digital basado en la manipulación de modelos dinámicos, la ausencia de contraejemplos durante la manipulación del modelo dinámico es suficiente para convencer a las y los estudiantes de la validez de un enunciado; es decir, se emplean con mayor frecuencia argumentaciones de tipo *empírico* o *explorativo*. Por otro lado, el paso del medio digital al papel favorece la obtención de argumentos *técnicos* y *deductivos*.

En otras palabras, al pasar del medio material “modelo dinámico” al medio material “lápiz y papel” los estudiantes obtienen con mayor frecuencia la resolución completa de un problema: la comprensión de la tarea facilita la aplicación eficaz de la técnica. Y al pasar del medio material “lápiz y papel” al medio material “modelo dinámico”, los estudiantes argumentan con coherencia una resolución homogénea del problema: la consolidación de la técnica algebraica facilita la instrumentalización.

El uso de la “maquina” como asistente de una argumentación no está exento de polémica. ¿Se podría considerar un argumento apoyado en un resultado automático, como un argumento basado en la autoridad? En efecto, la demostración automática de teoremas es una realidad hoy en día, y softwares de uso convencional como GeoGebra tienen implementados este tipo de paquetes (Botana, et al 2015). En todo caso, ya sea mediante la asistencia de un software o mediante la asistencia de una teoría matemática *implícita* al razonamiento, se puede afirmar que la argumentación escolar se basa en el estudio de un conjunto finito de casos, con el apoyo de una teoría implícita de referencia, gracias a la cual se excede el simple marco del estudio de ejemplos y contraejemplos (Lasa, Wilhelmi y Abaurrea, 2017).

Argumentación en el currículum de secundaria

Las nociones de *argumentación* y *razonamiento* aparecen también en ámbitos científico-tecnológicos (ciencias, tecnología, ingeniería y matemáticas), en ámbitos humanísticos (lengua y literatura), en ámbitos sociales (geografía e historia, economía), y en ámbitos artísticos (artes plásticas y musicales) y, por lo tanto, no son exclusivas del ámbito matemático (Abaurrea y Lasa, 2025).

En el marco del STEM, se especifica que los estudiantes deberán emplear métodos de razonamiento tanto *deductivos* como *inductivos*, en contextos de aplicación del método científico o al emplear el pensamiento computacional. Dichos procesos son siempre “dobles”, puesto que requieren, por un lado, de la reflexión y de la comunicación de resultados de tipo científico o matemático y, por otro lado, de procesos formales de demostración y prueba.

Es decir, desde el punto de vista metodológico, el aspecto principal de la argumentación es comunicativo y se debe alentar a las y los estudiantes a expresar, explicar y formular sus ideas y sus hallazgos, de manera clara e inteligible. Evidentemente, las producciones de las y los estudiantes serán necesariamente imprecisas y contendrán errores que se deberán poner en evidencia mediante el uso exclusivo del diálogo. Las y los estudiantes no sienten la necesidad de emplear demostraciones lógicas ni de usar codificaciones formales.

Por ejemplo, el currículo indica que las y los estudiantes deberán conocer y utilizar las normas IUPAC para la escritura de una cantidad de magnitud y su unidad; sin embargo, si el docente pone el énfasis exclusivamente en la correcta escritura formal de una cantidad, penaliza sistemáticamente su escritura informal (pe., si el estudiante olvida indicar la unidad tras un número), y no tiene en cuenta el contexto comunicativo y de aplicación de la actividad global, ésta sería la manera más rápida de desalentar a las y los estudiantes de continuar estudiando un itinerario científico o tecnológico.

Las normas y las reglas que articulan el discurso argumentativo pertenecen al ámbito humanístico. No se pueden obviar las competencias lingüística y comunicativa. En este sentido, la creación de un texto argumentativo tiene sus propios códigos y normas, y todo estudiante se debe ejercitar en su dominio. La filosofía es la disciplina que teoriza en la práctica del diálogo, y el estudio de las lenguas clásicas tendría interés más por el contenido argumentativo y dialéctico de los textos antiguos que por el mero estudio de una lengua muerta.

Las ciencias sociales profundizan en las normas que rigen la argumentación, y añaden a los aspectos formales (matemáticos) y retóricos (humanísticos) aspectos éticos, como la gestión del respeto hacia las opiniones del oponente, o el impacto de las emociones durante el proceso argumentativo. La argumentación debe ser, pues, respetuosa y acorde a las problemáticas sociales y ambientales que afectan a la sociedad.

Finalmente, desde el punto de vista de las artes, la *argumentación* puede aparecer ligada a la aplicación de una técnica, pero también a la noción de belleza y al disfrute. La libertad de expresión es, asimismo, un concepto ligado a la comunicación que afecta a todo proceso de razonamiento.

Por ejemplo, la creación de un patrón geométrico mediante técnicas de dibujo técnico, o el estudio de la honda generada por un instrumento musical, contienen nociones matemáticas complejas dignas de ser estudiadas; pero no hay que dejar de lado que toda obra artística sigue un patrón de belleza, y que las y los estudiantes deben conocer las destrezas comunicativas que permitan argumentar su disfrute.

Algunos ejemplos

Durante el curso 2024/2025, se solicitó a docentes de matemáticas en formación inicial (DMFI) que cursan el máster de profesorado de secundaria, que abordaran un estudio del currículo fijándose en las nociones de argumentación y razonamiento, como elementos potenciales para diseñar situaciones de aprendizaje que fueran transversales al estudio de las matemáticas.

La muestra descrita en la tabla 1 está formada por 11 DMFI, y todos ellos tienen estudios previos en ámbitos científico-tecnológicos (matemáticas, ciencias o ingenierías). Como se puede observar, los DMFI eligen su tema de manera libre, pero de manera natural aparecen prácticamente todos los ámbitos curriculares descritos en la sección anterior.

Tabla 1

Distribución de temas en trabajos.

Etapas	Materia transversal a matemáticas	Trabajos
Educación Secundaria Obligatoria	Biología y geología	1
Educación Secundaria Obligatoria	Física y química	1
Educación Secundaria Obligatoria	Geografía e historia	3
Educación Secundaria Obligatoria	Música	1
Bachillerato	Lengua y literatura	2
Bachillerato de ciencias	Biología	1
Bachillerato de ciencias	Dibujo técnico	1
Bachillerato de ciencias sociales	Economía, historia del mundo	1

Abaurrea y Lasa (2025).

En las propuestas de ámbito STEM destacan aquellas que se centran en la búsqueda de patrones en contextos biológicos (virología, epidemiología, propagación de enfermedades, curvas de infectados, medidas de contención, etc.), con el objetivo de modelizar, con la ayuda de instrumentos digitales, una situación mediante elementos algebraicos y funcionales. La búsqueda de patrones se extiende, asimismo, a ejemplos de paneles de abeja, pipas de girasol, conchas de nautilus o filotaxia de hojas de plantas. El proceso de argumentación se dinamiza mediante metodologías de Aprendizaje Basado en la Indagación (ABI) y buscan argumentar y razonar en términos de eficiencia, optimización, maximización o supervivencia.

Las situaciones de aprendizaje basadas en STEM se pueden centrar también en las siglas Tecnología e Ingeniería. Es el caso de las situaciones de aprendizaje que se centran en el estudio de una estructura

determinada, como, por ejemplo, el looping de una “montaña rusa”. En estos casos, la modelización mediante software permite una vez más la modelización mediante expresiones algebraicas y funcionales no accesibles al estudiante mediante soportes de “lápiz-y-papel”.

Se pone en valor, una vez más, la potencialidad de la metodología por indagación para gestionar la situación de aprendizaje, desde la obtención de información histórica a la discusión de las propiedades físicas de una construcción. Además, el método científico permite en este caso la experimentación mediante la construcción física de diversos modelos.

En el caso de las situaciones de aprendizaje transversales a las disciplinas humanísticas, se pone en valor la habilidad de redacción de textos que expliquen y ejemplifiquen un modelo algebraico a resolver, con el objetivo de elaborar criterios de clasificación de textos en función del tipo de ecuación o sistema de ecuaciones que describen. Se ponen en valor, asimismo, las herramientas lógicas que permiten analizar el lenguaje para distinguir argumentos lógicamente correctos de falacias argumentales.

Las ciencias sociales aportan contextos de gran valor social y medioambiental, como el problema ético de distribución de la riqueza en el mundo, que permiten analizar los aspectos económicos del problema a través de los principales índices o indicadores económicos como el PIB, el PIB per cápita, índice de Gini, etc. La argumentación debe servir en estos contextos para validar la solidez de las soluciones que se aportan a dicho problema. Otros contextos sociales son útiles para trabajar la lectura e interpretación de gráficos, tales como el análisis de diagramas de población.

Finalmente, los contextos artísticos pueden servir como telón de fondo para el estudio de las transformaciones isométricas y de las teselaciones del plano. En ellas, convergen tanto el pensamiento inductivo (se parte de ejemplos de la vida cotidiana para buscar propiedades y reglas en patrones geométricos) como el deductivo (mediante la composición y descomposición de teselas complejas dadas a partir de una regla). En todas ellas, los elementos procedimentales como la precisión en la aplicación del dibujo técnico, se mezclan con las nociones de argumentación.

Nociones matemáticas elementales como la proporcionalidad aparecen también en contextos musicales, en los cuales la argumentación no solo sirve para describir el sonido mediante gráficos funcionales de sus ondas de expansión, sino que aparece también ligada a la argumentación del “gusto por el sonido”.

RESULTADOS

Los textos legales no suelen contemplar la *argumentación* como un contenido o una habilidad matemática curricular. Sin embargo, la argumentación sí aparece ligada con mayor frecuencia a la *evaluación* de los estudiantes, de los que se requiere que argumenten sus respuestas dentro de su actividad matemática. Se podría, pues, preguntar, ¿en base a qué *competencias* “argumentativas” mostradas se debe evaluar al estudiante? La didáctica de las matemáticas no conoce o no describe algo similar a unos “niveles de argumentación” que sirvan de referencia para decidir si un estudiante en un nivel determinado argumenta según lo requerido de manera objetiva.

Con todo, los docentes tienen el requerimiento de evaluar la argumentación de los estudiantes, y se observa que la argumentación es un elemento común a diferentes materias; es por ello un elemento que facilita la transversalidad entre dichas materias.

En términos de *idoneidad cognitiva*, la formulación de conjeturas iniciales y su desarrollo por indagación permite la construcción de un argumento que sirva para dar respuesta a las preguntas planteadas en la situación de aprendizaje. Durante este proceso, el alumnado distingue entre “argumentos consensuados” y “argumentos no consensuados” por el grupo.

En términos de *idoneidad interaccional*, el proceso de comunicación de un resultado requiere implícitamente de elementos retóricos para convencer al igual. En este sentido, la argumentación incluye la capacidad expositiva, la participación en debates, o el empleo de soportes digitales para apoyar las explicaciones.

En términos de *idoneidad epistémica*, se valora la validez de un argumento en función de su valor de verdad en tanto que silogismo lógico.

DISCUSIÓN

Finalmente, se identifican dos aspectos problemáticos en torno a las nociones de argumentación.

La primera cuestión tiene que ver con la confusión que en ocasiones existe entre “argumentos” y “procedimientos”. En efecto, en la descripción de ciertos procesos matemáticos da la impresión de que un procedimiento riguroso, estricto y formal adquiere automáticamente la categoría de argumento. Sin embargo, no hay que olvidar que se trata de dos objetos de distinta naturaleza, en tanto que *objetos matemáticos primarios*.

La segunda cuestión tiene ver con el exceso de formalismo presente en algunas propuestas dirigidas a estudiantes de educación secundaria. La implementación de metodologías STEM se debe entender como una fortaleza, dado que permite a los estudiantes tener una experiencia directa con actividades de laboratorio, trabajo por proyectos, salidas a la naturaleza, etc., extremadamente adecuados a su edad y su desarrollo evolutivo.

Por el contrario, se puede dar el caso de que el docente ponga excesivo énfasis en los aspectos formales o simbólicos de la actividad (aplicación estricta de normas IUPAC, exceso de celo en la escritura simbólica de expresiones algebraicas, etc.), lo cual puede derivar en un fenómeno de desapego hacia la actividad matemática o científica.

REFERENCIAS

- Abaurrea, J., Lasa, A. (2025). Carácter transversal de la argumentación en el currículum de matemáticas. *Educação Matemática Pesquisa*. [En prensa].
- Boletín Oficial de Navarra (BON) (2015). Decreto Foral 24/2015, de 22 de abril, por el que se establece el currículo de las enseñanzas de Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Foral de Navarra. Pamplona: Autor. Disponible en, http://www.navarra.es/home_es/Actualidad/BON/Boletines/2015/127/.
- Botana, F., Hohenwarter, M., Janicic, P., Kovacs, Z., Petrovic, I., Recio, T., & Weitzhofer, S. (2015). Automated Theorem Proving in GeoGebra: Current Achievements. *Journal of Automated Reasoning*, 55(1), 39-59.
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La pensée sauvage, éditions.
- Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.
- Godino, J.D. (2024). *Enfoque ontosemiótico de educación matemática. Fundamentos, herramientas y aplicaciones*. Editorial Aula Magna.
- Lasa, A. (2016). *Instrumentación del medio material GeoGebra e idoneidad didáctica en procesos de resolución de sistemas de ecuaciones*. Universidad Pública de Navarra. Tesis Doctoral.
- Lasa, A., Wilhelmi, M.R., & Abaurrea, J. (2017). El problema de la argumentación: una aproximación desde el EOS. En J.M. Contreras, P. Arteaga, G.R. Cañadas, M.M. Gea, B. Giacomone y M.M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en, www.enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html