Quintaesencia
Revista de Educación
ISSN 2076-5363 (en línea)

Quintaesencia [(2025), vol. 16, Núm. 1, pp 38-74]
DOI: https://doi.org/10.54943/rq.v16i1.674

Artículo de revisión

Principales teorías sobre el aprendizaje de las matemáticas

Leading theories of mathematics learning

Cerapio Quintanilla [1, a]

[1] Universidad Nacional de Huancavelica, Perú quintanilla.cn@unh.edu.pe

[a] ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7639-3785

Información

Recibido: 12 de abril del 2024

Aceptado: 03 de noviembre del 2024

Palabras clave:

Aprendizaje de las matemáticas, teorías psicológicas, teorías cognitivas, constructivismo social, didáctica de las matemáticas.

Resumen

El presente artículo de revisión ofrece una panorámica de las principales teorías que sustentan el aprendizaje de las matemáticas. Se exploran tanto las perspectivas psicológicas (constructivismo de Piaget, sociocultural de Vygotsky y redescubrimiento de Bruner) como las cognitivas (teorías APOS de Dubinsky, teoría de la comprensión de Pirie-Kieren y construccionismo de Papert). Asimismo, se expone las teorías social constructivistas de la didáctica de las matemáticas, destacando la teoría de situaciones didácticas de Brousseau, la teoría antropológica de lo didáctico de Chevallard, la teoría de ingeniería didáctica de Artigue, la socioepistemología de Cantoral, el enfoque Ontosemiótico de Godino, la teoría de la objetivación de Radford y el constructivismo radical de Glasersfeld. Este análisis comparativo revela una rica diversidad de enfoques, cada uno aportando valiosas herramientas para comprender los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Las teorías psicológicas enfatizan la construcción activa del conocimiento por parte del estudiante, mientras que las cognitivas se centran en los procesos mentales involucrados en la resolución de problemas matemáticos. Las teorías social constructivistas, por su parte, subrayan la importancia del contexto social y cultural en la construcción del conocimiento matemático. En conjunto, estas principales teorías ofrecen un marco conceptual sólido para diseñar estrategias de enseñanza más efectivas y para comprender las dificultades que los estudiantes enfrentan al aprender matemáticas, así como desarrollar investigaciones por parte de la comunidad científica; ninguna de las teorías es mejor que otra, sino cada uno de ellos juegan un papel muy importante en el campo de las didácticas de las matemáticas. Finalmente, existen muchas otras teorías que el lector puede explorar de acuerdo a la necesidad y su experiencia académica.

Information

Keywords:

Mathematics learning, Psychological theories, Cognitive theories, Social constructivism, Mathematics didactics.

Abstract

This review article provides an overview of the main theories underpinning mathematics learning. It explores both psychological perspectives (Piaget's constructivism, Vygotsky's sociocultural theory, and Bruner's rediscovery approach) and cognitive perspectives (Dubinsky's APOS theory, Pirie-Kieren's theory of understanding, and Papert's constructionism). Additionally, it examines social constructivist theories in the didactics of mathematics, highlighting Brousseau's Theory of Didactic Situations, Chevallard's Anthropological Theory of Didactics, Artigue's Didactic Engineering Theory, Cantoral's Socioepistemology, Godino's Ontosemiotic Approach, Radford's Theory of Objectification, and Glasersfeld's Radical Constructivism. This comparative analysis reveals a rich diversity of approaches, each providing valuable tools for understanding the processes of teaching and learning mathematics. Psychological theories emphasize the student's active construction of knowledge, while cognitive theories focus on the mental processes involved in solving mathematical problems. Social constructivist theories, on the other hand, emphasize the importance of social and cultural contexts in the construction of mathematical knowledge. Together, these major theories offer a solid conceptual framework for designing more effective teaching strategies and for understanding the challenges students face when learning mathematics, as well as for guiding research in the scientific community. None of these theories is superior to the others; rather, each plays a crucial role in the field of mathematics didactics. Finally, there are many other theories that readers can explore according to their needs and academic background.

1. TEORÍAS PSICOLÓGICAS DEL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

1.1. La visión constructivista de Piaget

La base fundamental para comprender el proceso de aprendizaje y el desarrollo de los conocimientos de los niños es la teoría de Jean William Fritz Piaget (1896–1980). Piaget hizo un estudio sobre el desarrollo y la formación de los conocimientos tomando en cuenta el proceso central de equilibración, considera que los ciclos epistémicos y su funcionamiento se basan en los procesos que son los componentes de un equilibrio cognitivo, *asimilación* y *acomodación*.

La equilibración es un proceso que conduce desde ciertos estados de aproximados equilibrios a otros, cualitativamente diferentes, pasando por múltiples desequilibrios y reequilibraciones. Estos equilibrios cognitivos son muy diferentes a un equilibrio mecánico. Además, considera que los ciclos epistémicos y su funcionamiento se basan en dos procesos fundamentales que son los componentes de un equilibrio cognitivo, *asimilación* y *acomodación*; para ello, propone dos postulados:

a) Todo esquema de asimilación tiende a alimentarse, es decir, a incorporar los elementos exteriores a él y compatibles con su naturaleza.
b) Todo esquema de asimilación se encuentra obligado a acomodarse a los elementos que asimila, es decir, a modificarse en función de sus particularidades, pero sin perder, por ello, su continuidad (y por tanto su cerramiento en cuanto ciclo de procesos interdependientes), ni sus anteriores poderes de asimilación (Piaget, 1990, p. 9).

Considera que el segundo postulado es válido en el plano biológico con las adaptaciones fenotípicas; entonces, es necesario un equilibrio entre la asimilación y la acomodación, en la medida que la acomodación se impone y sigue siendo compatible con el ciclo, modificado o no. También ocurre una asimilación *recíproca*; cuando dos esquemas o subsistemas se aplican a los mismos objetos; por ejemplo, dos acciones, como la de mirar y coger un objeto, que pueden ser dependientes o independientes, o se coordinan sin tener necesidad del contenido real.

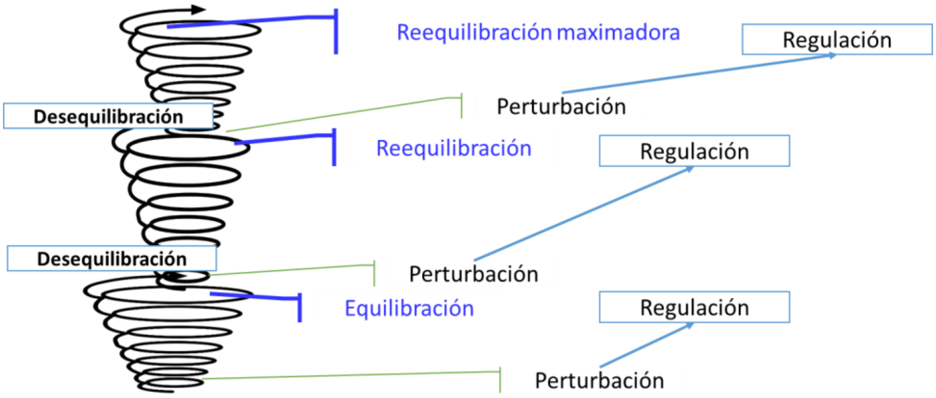
El equilibrio cognitivo se consigue cuando el estudiante ha alcanzado un nivel de conocimiento, pero ¿por qué se producen los desequilibrios? Al respecto, Piaget (1990, p. 14) considera que "es evidente que en una perspectiva de equilibración una de las fuentes de progreso en el desarrollo de los conocimientos ha de buscarse en los desequilibrios como tales, de por sí solos obligan a un sujeto a superar su estado actual y a buscar lo que sea en nuevas direcciones". Los *desequilibrios* solo desempeñan una función de *desencadenadores*, ya que su fecundidad se mide por la posibilidad de superarlos; pero este desequilibrio hay que superarlo buscando una fuente real en la *reequilibración*, no en el mismo equilibrio que desencadenó el conflicto, sino en una forma superior. Por tanto, sin el desequilibrio no se habría producido una "reequilibración maximizadora" (Inhelder, García, & Vonèche, 1978; Piaget, 1990), denominado así a la equilibración con la mejora obtenida.

Consideremos un ejemplo de desequilibro en la adición. Hasta la aparición del tema de los números enteros, los niños han trabajado con números naturales en la adición, por lo que la adición suponía la obtención de un resultado igual o mayor a uno de los componentes: $3 + 0 = 3$, $2 + 5 = 7$; entonces, los niños han alcanzado el equilibrio. Pero cuando le presentamos una adición con signo negativo de la forma: $4 + (-3)$, produce en los niños y niñas un desequilibrio en la concepción de la operación adición, que se resolverá con la correspondiente asimilación y acomodación.

Es necesario prestar atención a cómo funciona la equilibración. Para Piaget (1990) se inicia con la *perturbación* y se define como aquello que constituye un *obstáculo* para la asimilación, como la llegada a un objetivo; todas las *regulaciones* son, desde el punto de vista del sujeto, reacciones a perturbaciones. Además, considera ***dos tipos de perturbaciones***: **a)** una que se opone a las acomodaciones, que constituye las causas de fracasos o de errores, donde las regulaciones que les corresponden entrañan una retroalimentación negativa; **b)** la segunda; se refiere a las perturbaciones que son fuentes de desequilibrios, que consisten en *lagunas* que dejan las necesidades insatisfechas y se expresan en la alimentación insuficiente de un esquema. Una *laguna* se convierte en una perturbación cuando se trata de la ausencia de un objeto o de las condiciones de una situación que son necesarias para realizar una acción o, incluso, cuando existe carencia de un conocimiento que es indispensable para resolver un problema. Cabe aclarar; que cualquier laguna no constituye una perturbación.

Figura 1

Diagrama del sistema de equilibración y reequilibración de Piaget



Los mecanismos de regulación hacen que intervengan dos componentes de sentidos opuestos: uno retroactivo, que conduce del resultado de una acción a su repetición, y otro proactivo, que conduce a una corrección o a un refuerzo. La *retroalimentación negativa* consiste en una corrección supresora, ya que se trata de apartar obstáculos o modificar esquemas eliminando un elemento en provecho de otro. La *retroalimentación positiva* es cuando se realiza un refuerzo, ajena a cualquier negación. Es necesario determinar la naturaleza de una laguna; según Piaget "una *laguna* es un carácter negativo y llenar una laguna con un refuerzo es también una supresión, aunque afecte a esta insuficiencia como tal" (Piaget, 1990, p. 28).

Si los equilibrios funcionan por conservaciones mutuas; y la perturbación es la que amenaza a esa conservación, para neutralizar dicha perturbación existe un elemento denominado compensación (Piaget, 1990). De forma general, las regulaciones mediante retroalimentaciones negativas desembocan siempre en compensaciones, pero en su seno se pueden distinguir dos clases: las compensaciones por inversión, que consisten en anular la perturbación, y las compensaciones de reciprocidad, que consisten en diferenciar el esquema para acomodarlo al elemento inicialmente perturbador. "En el caso de las perturbaciones que se pueden producir con ocasión de la asimilación recíproca de esquemas o de subsistemas, es evidente que las regulaciones desembocan en compensaciones por reciprocidad" (Piaget, 1990, p. 31). Finalmente, añade que "si toda perturbación desencadena una regulación y si toda regulación conlleva una compensación que se orienta hacia el equilibrio, la tesis es siempre verdadera y en consecuencia tautológica" (p. 191).

1.1.1. Asimilación y acomodación

Piaget centra su investigación en la inteligencia y el pensamiento, en la búsqueda de conceptos formales que expliquen el conocimiento bajo dos conceptos centrales denominados asimilación y acomodación. Para Da Silva (2008) la *asimilación* es directamente derivada de la biología, y es la capacidad del organismo para incorporar el objeto de la cognición a su estructura cognitiva. Para que esto ocurra, es necesaria que ciertas transformaciones sean ejecutadas por el organismo sobre el objeto de la realidad, de modo que al colocarla en forma adecuada ocurra la absorción. La asimilación se relaciona con la adquisición de nuevos datos y la formación de vínculos entre esta nueva información y la estructura original (Meel, 2003). El resultado de este proceso es una forma de conocimiento, y no es el resultado de copiar el dato externo, tal como se nos presenta a los sentidos. Por ello, asimilar no es copiar, *asimilar es dar sentido e interpretar, dar significado a una nueva experiencia* para que luego sean parte de nuestros esquemas cognitivos y requiera acomodación continuamente.

La **acomodación** reorganiza parte del todo de la estructura cognitiva del individuo (Meel, 2003). Según Piaget (1976, p. 316), "esta acomodación permanece de tal modo indiferenciada de los procesos asimiladores, que no da lugar a ninguna conducta especial, sino que consiste, simplemente, en un ajuste de estos a las cosas asimiladas". La acomodación consiste en la modificación de la estructura cognitiva o del esquema comportamental para acoger nuevos objetos y eventos que, hasta el momento eran desconocidos para el niño

Finalmente, es importante resaltar que el conocimiento elemental nunca es resultado de una simple impresión impuesta por los objetos en los órganos sensoriales, sino que siempre se debe a una asimilación activa del sujeto que incorpora los objetos a sus esquemas sensomotores, es decir, a aquellas acciones propias que son susceptibles de reproducirse y de combinarse entre ellas. Por consiguiente, el aprendizaje en función de la experiencia no se realiza a partir de presiones pasivamente sufridas por el sujeto, sino a partir de la acomodación de sus esquemas de asimilación (Piaget, 1985).

Meel (2003), considera que la asimilación y la acomodación subyacentes son dos mecanismos esenciales en el desarrollo cognitivo y están compuestos por dos componentes esenciales, que son la *generalización* y la *abstracción*. En matemáticas, la generalización comúnmente se refiere al proceso de aplicar un argumento en un contexto más amplio; sin embargo, el tipo de generalización empleada por el estudiante depende de la estructura cognitiva. En cambio, la abstracción, se presenta cuando el estudiante se orienta en las propiedades de un objeto, es decir, en la estructura subyacente del contexto, y extrapola las cualidades o características comunes y las considera aisladas del objeto del cual se obtuvieron.

En resumen, Piaget; no solo construye un edificio teórico complejo y coherente sino que aporta un enfoque y una metodología nueva para abordar el problema del conocimiento humano. Además, hace posible la construcción de una ciencia del conocimiento, la epistemología genética, que no se limita a estudiar el desarrollo individual sino que abarca también el desarrollo del pensamiento científico (Socas Robayna, 2000).

1.1.2. La abstracción reflexiva de Piaget

El trabajo fundamental de proceso cognitivo de Piaget que él calificó como “equilibrio”, se describe como el proceso por el cual el sujeto intenta comprender todo un sistema cognitivo. Tal sistema ocurre cuando el sujeto construye cognitivamente una comprensión de una información a través de un proceso llamado “abstracción reflexiva” (Dubinsky & Lewin, 1986).

Abstracción empírica

Para Piaget y Beth (1980, p. 212), la abstracción empírica proviene de los objetos percibidos y consiste simplemente en extraer los caracteres comunes de una clase de objetos (combinando la abstracción con la mera generalización); es decir, la abstracción empírica es como el mecanismo que deriva del conocimiento de las propiedades de los objetos, y aparece con las experiencias del sujeto y es algo externo; sin embargo, el conocimiento de aquellas propiedades es el resultado de las construcciones hechas internamente por el sujeto (Dubinsky, 1991). Ejemplo, cuando extraemos alguna propiedad de un objeto, la noción de peso, o de color, sin hacer ninguna acción sobre el objeto, entonces se trata de una *abstracción empírica*. En efecto, las abstracciones en los primeros años de infante se podrían decir que son las abstracciones empíricas; en cambio en el adulto se presenta en las experiencias iniciales.

Abstracción seudo-empírica

Se encuentra en el intermedio entre la abstracción empírica y la abstracción reflexiva. “Se trata de una regulación, no ya de las abstracciones empíricas, sino de las abstracciones seudoempíricas [sic] (es decir, que atañen a propiedades que las operaciones del sujeto introducen en los objetos, como el orden o el número, etc., y no a las propiedades físicas). Hay por lo tanto, aquí un tipo más complejo de las regulaciones” (Piaget, 1990, p. 24). El conocimiento de esta situación se considera empírica porque tiene que ver con los objetos; sin embargo, su configuración en el espacio da lugar a realizar acciones sobre los objetos (Dubinsky, 1991). Cuando la coordinación afecta a las propiedades momentáneas de los objetos, pero introducidas en ellos por el sujeto: por ejemplo, la equivalencia entre dos filas de fichas que el sujeto habrá ordenado en correspondencia de término a término. En este caso, es evidente que se tratará de una coordinación entre acciones u operaciones del sujeto y no entre objetos, aunque la lectura de los resultados se efectúa en los objetos, pero en la medida en que se les aplica las operaciones en juego (Piaget, 1990, p. 52). Una vez más, por supuesto, entendiendo que hay una relación 1–1 entre dos conjuntos es el resultado de las construcciones informales hechas por los sujetos.

Abstracción reflexiva

La abstracción reflexiva consiste en extraer de un sistema de acciones o de operaciones de nivel inferior ciertos caracteres, cuya reflexión (en el sentido casi físico del término) sobre acciones u operaciones de nivel superior está garantizada por ella misma; pues no es posible percatarse de los procesos de una construcción anterior sino reconstruyéndola sobre un nuevo plano (Piaget & Beth, 1980, p. 212). Mientras que Ayers, Davis, Dubinsky y Lewin (1988, p. 2), entienden por abstracción reflexiva al proceso cognitivo por el cual una acción física o mental se reconstruye y reorganiza en un plano superior del pensamiento. Cuando la equilibración en una estructura cognitiva reequilibra una perturbación por sometimiento en mayor o menor grado de reconstrucción, a este proceso se le conoce como abstracción reflexiva. Entonces, se considera que el aprendizaje del estudiante fue exitoso, y la abstracción reflexiva ha tomado lugar (Dubinsky & Lewin, 1986). La abstracción reflexiva es el mecanismo que nos sirve para extraer o separar una característica de un objeto, a partir no exactamente de los objetos, sino de acciones que realizamos sobre ellos.

Por tanto, la abstracción empírica y la abstracción seudo–empírica se basan en el conocimiento de los objetos mediante la realización o imaginación de las acciones sobre ellos. En cambio, la abstracción reflexiva interioriza y coordina estas acciones para formar nuevas acciones y, en última instancia, nuevos objetos. La abstracción empírica se utiliza para extraer los datos de estos nuevos objetos a través de la acción mental sobre ellos, y así sucesivamente. En la *abstracción empírica* el sujeto observa una serie de objetos y abstrae la propiedad común. Por otra parte, la abstracción seudo-empírica procede de la misma manera; luego de haber realizado acciones sobre los objetos. Mientras tanto, la abstracción reflexiva es mucho más complicado, pero el desarrollo cognitivo puede darse a través de las abstracciones (Dubinsky, 1991, p. 96).

1.2. La visión social de aprendizaje de Vigotsky

Vygotsky hijo de una familia judía, nació en Orsha en 1896 y falleció en 1934. En su tesis doctoral sobre psicología del arte, aparecen ciertos bosquejos sobre las funciones psicológicas inferiores y superiores, lo que da origen a problemas de aprendizaje; este es un tema que desarrolló a lo largo de sus obras.

El carácter histórico y social de los procesos psicológicos superiores, el papel de los instrumentos de mediación que protagonizan en su ejecución y, en un plano metodológico, la necesidad de un enfoque genético en psicología; conforman la tesis de que los procesos psíquicos superiores tienen un origen histórico social, que los instrumentos de mediación (herramientas y signos) cumplen un papel importante en la constitución de los procesos psíquicos superiores y estos se pueden abordar desde una perspectiva genética (Baquero, 2001).

Según Vygotsky, “el desarrollo cultural del niño se caracteriza, en primer lugar, por el hecho de que transcurre bajo condiciones de cambios dinámicos en el organismo. El desarrollo cultural se halla sobrepuesto a los procesos de crecimiento, maduración y desarrollo orgánico del niño. Forma una unidad con estos procesos. Solamente mediante un proceso de abstracción podemos separar un conjunto de procesos de otro”(Baquero, 2001, p. 38).

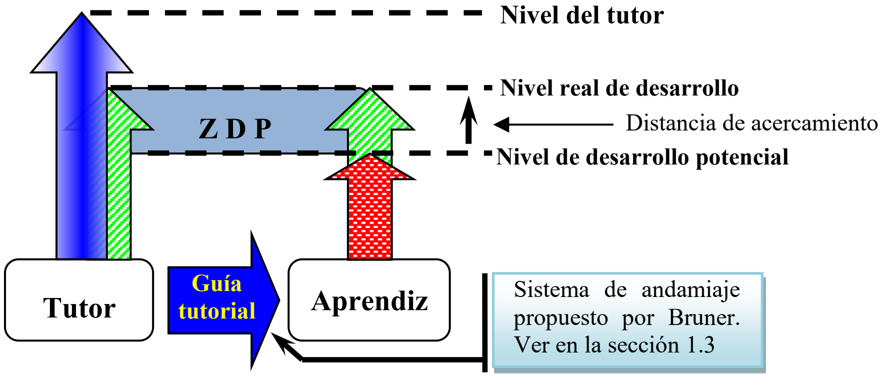
Para Vygotsky la función inicial del lenguaje es la comunicativa. El lenguaje es, ante todo, un *medio de comunicación social*, de expresión y de comprensión (Ackermann, 2004; Baquero, 2001; Vygotsky, 1989). Vygotsky hace mayor énfasis que Piaget sobre el rol del lenguaje, y en la relación de integración entre el habla y la inteligencia, o entre el habla y el desarrollo cognitivo (Harel, 1991).   Según Vigotsky (1979, p. 49) “para el niño, hablar es tan importante como el actuar para lograr una meta. Los niños no hablan sólo de lo que están haciendo; su acción y conversación son parte de *una única y misma función psicológica* dirigida hacia la solución del problema planteado”. Además, para Vigotsky, los niños resuelven tareas prácticas con la ayuda del lenguaje, así como con la de sus ojos y de sus manos; esto le permite la internalización del campo visual.

El aprendizaje infantil, se inicia mucho antes de que el niño llegue a la escuela (Vigotsky, 1979). Los niños empiezan a estudiar aritmética en la escuela, pero mucho antes han tenido ya alguna experiencia con la operación de cantidades. Luego, Vigotsky (1979) demostró:

"…que la capacidad de dos niños de idéntico nivel de desarrollo mental para aprender bajo la guía de un maestro variaba en gran medida, se hizo evidente que ambos niños no poseían la misma edad mental y que evidentemente, el subsiguiente curso de su aprendizaje sería distinto. Esta diferencia entre doce y ocho, o nueve y ocho, es lo que denominamos la *zona de desarrollo próximo. No es otra cosa que la distancia entre el nivel real de desarrollo, determinado por la capacidad de resolver independientemente un problema, y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con otro compañero más capaz*" (p. 133).

Figura 2

Esquema de la zona de desarrollo próximo (ZDP) de Vigotsky y el andamiaje de Bruner



Estos dos procesos son los ejes y los que nos permiten trazar el futuro inmediato del niño/a, así como su estado evolutivo en la propuesta de las prácticas educativas por Vigotsky; el nivel real de desarrollo del niño es cuando éste tiene la capacidad de realizar un problema de modo independiente. Mientras tanto, define la zona de desarrollo próximo como la zona en la que aquellas funciones todavía no han madurado, pero se hallan en proceso de maduración; son funciones que, más adelante alcanzarán su madurez. "El nivel de desarrollo real caracteriza el desarrollo mental retrospectivamente, mientras que la zona de desarrollo próximo caracteriza el desarrollo mental prospectivamente" (Vigotsky, 1979, p. 134).

En efecto, sobre los procesos del aprendizaje "nosotros postulamos que lo que crea la zona de desarrollo próximo, es un rasgo esencial de aprendizaje; es decir, el aprendizaje despierta una serie de procesos evolutivos internos capaces de operar solo cuando el niño está en interacción con las personas de su entorno y en cooperación con algún semejante. Una vez se ha internalizado estos procesos, se convierte en parte de los logros evolutivos independientes del niño" (Vigotsky, 1979, pp. 138-139).

Idit Harel (1991, p. 29), sostiene que la teoría de Vigotsky nos ofrece varias e importantes ideas pedagógicas, pero no posee una estructura técnica que relacione el mecanismo de la mente con el desarrollo cognitivo. En cambio, el constructivismo de Piaget, tiene una estructura teórica y una estructura teórica del mecanismo de la mente y del desarrollo cognitivo.

1.3. El aprendizaje por descubrimiento y el andamiaje de Jerome Bruner

El aprendizaje de Bruner se basa en la categorización de los procesos mediante las cuales simplifica la interacción con la realidad a partir de la agrupación de objetos u sucesos (Esteban, 2009). El aprendiz construye su conocimiento según sus propias categorías y va modificando a partir de su interacción con el ambiente. Por tanto, el aprendizaje es un proceso activo, de asociación, construcción y representación. Aramburu Oyarbide (2004, p. 12) sostiene que el aprendizaje por descubrimiento puede infundirle confianza al estudiante. Asimismo, Esteban (2009, p. 238) considera que una fase cognitiva del pensamiento pedagógico de Bruner es el aprendizaje por descubrimiento. El instructor debe motivar a los estudiantes para que sean ellos mismos los que descubran relaciones entre conceptos y construyan conocimientos. La influencia de Piaget al respecto es evidente.

Bruner observa que los seres humanos comprenden mejor por la estimulación visual y la experiencia de la manipulación de objetos en nuestro entorno. Bruner llegó a la conclusión de que nuestras mentes funcionan de tres maneras principales: habilidades de iconos (reconocimiento visual), habilidades de manejos inactivos (manipulación de objetos inertes) y habilidades simbólicas (capacidad para comprender el razonamiento abstracto). Y que según Booth (2006, p. 3), Kay utilizó estas observaciones para crear el primer interfaz (Graphical User Interface) llamado "Xerox Star", una interfaz gráfica de ventanas (Windowing GUI), con todos sus componentes. Y que Microsoft no tardó en ponerse en esta idea y creó su propia GUI llamado ´Windows´.

Por otra parte en el aprendizaje, las discusiones sobre la resolución de problemas o la adquisición de habilidades por lo general parten de la premisa de que el alumno está solo y sin ayuda. En consecuencia, el papel central del buen maestro consiste en descubrir la ZDP de cada estudiante en un momento determinado de su desarrollo y facilitarle la ***mediación*** y el apoyo en el aprendizaje. Esa actividad del profesor constituye el "andamiaje", que permite a un niño/a o novato, resolver un problema o una tarea para alcanzar un objetivo, que sería muy difícil alcanzar sin la ayuda de un tutor (Wood, Bruner, & Ross, 1976). Este ***andamiaje***, consiste esencialmente en que el adulto controle los elementos de la tarea que inicialmente está más allá de la capacidad del alumno (ver Figura 2).

2. TEORÍAS COGNITIVAS DEL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

En esta parte, se presentan las principales teorías cognitivas de la matemática educativa, la teoría de la comprensión de Pirie–Kieren, la teoría APOS (acción, proceso, objeto y esquema) del grupo RUMEC y el construccionismo de Seymour Papert.

Los trabajos de Jean Piaget, dieron origen a la teoría APOS (1985 – 1995) propuesta por Dubinsky, (2000) (Asiala et al., 1996), así como a la teoría del construccionismo. Esta teoría explica cómo los niños comprenden un determinado concepto u objeto matemático a través de niveles de constructos mentales y abstracciones reflexivas. El construccionismo de Seymour Papert, también se sustenta en los trabajos de Piaget, Vygotsky y Bruner y se considera una teoría más amplia que ayuda a comprender a las anteriores.

2.1. La teoría APOS

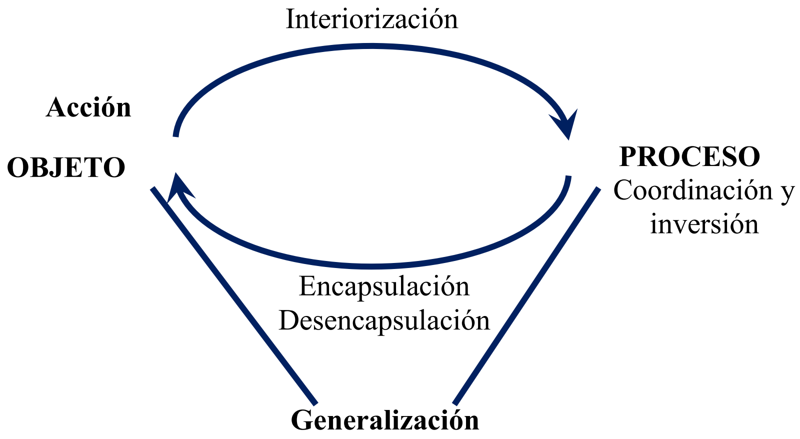
La teoría APOS (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) es un modelo cognitivo desarrollado por Ed Dubinsky y sus colaboradores para explicar cómo los estudiantes construyen el conocimiento matemático. Esta teoría se sustenta en la teoría de Piaget, quien considera que el aprendizaje es un proceso constructivo, en el que los estudiantes transforman acciones en procesos, procesos en objetos y finalmente integran estos objetos en esquemas más complejos.

El mecanismo principal en la construcción de conocimiento matemático en la teoría APOS, es la abstracción reflexiva tomada de Piaget (coordinación general de acciones), en el sentido de un proceso que permite al individuo, a partir de las acciones sobre los objetos, inferir sus propiedades o las relaciones entre objetos o en cierto nivel de pensamiento, lo que implica, entre otras cosas, la organización o la toma de conciencia de dichas acciones y separar la forma de sus contenidos e insertar esta información en un marco intelectual reorganizado en un nivel superior (Trigueros, 2005).

Para Dubinsky, los trabajos de Piaget sobre el proceso de abstracción *reflexiva* fueron la clave para la construcción de los conceptos lógico matemáticos, e influyeron en el desarrollo de la teoría de Acción – Proceso – Objeto – Esquema (teoría APOS, sigla en inglés: Action, Process, Object and Schema). Meel (2003) sostiene que en el mecanismo de la construcción de estos esquemas, la abstracción reflexiva, es el corazón de la teoría APOS; además, añade que la abstracción reflexiva extiende la construcción de conexiones entre los conceptos abstraídos y constituye una estructura fuera de las abstracciones relacionadas. A continuación, se muestra la construcción de la estructura del conocimiento matemático.

Figura 3

Etapas de los objetos y procesos como constructo mental (Meel, 2003)



).

2.1.1. Constructo mental de Acción

Los elementos principales de la teoría APOS son cuatro; y la piedra angular es el constructo mental *acción* (similar a los *esquemas acción* de Piaget). Según Asiala et al. (1996), la comprensión de un concepto matemático comienza con la manipulación de objetos físicos o mentales previamente construidos para formar acciones. Y para Breidenbach, Dubinsky, Hawks, y Nichols (1992, p. 249) una *acción* es "cualquier manipulación repetible, física o mental, que transforma objetos (por ejemplo, números, figuras geométricas, conjuntos, etc.) para obtener objetos".

2.1.2. Constructo mental de Proceso

Cuando una acción es repetida y el individuo reflexiona sobre ella, puede *interiorizar* tal acción en ***proceso***; la construcción interna permite realizar la misma acción, pero no puede ser dirigida necesariamente por estímulos externos. Según Meel (2003, p. 244), "conforme una acción se *interioriza* a través de una secuencia de repetición de la acción y el reflejo de la misma, la acción ya no se maneja por influencias externas, pues se vuelve una construcción interna llamada *proceso* (similar a las *operaciones de Piaget*)". El logro de esta concepción de proceso indica que el estudiante puede reflejar el proceso, describirlo e, incluso, revertir los pasos de transformación sin requerir el estímulo externo (Asiala et al., 1996).

2.1.3. Constructo mental de objeto

Cuando un individuo reflexiona sobre acciones aplicadas a un proceso específico, y es consciente del proceso como un todo, percibe qué transformaciones (acciones o procesos) pueden influir en el proceso y es capaz de construir realmente tales transformaciones. En tal sentido, se dice que el individuo reconstruyó o encapsuló el proceso como un **objeto** cognitivo. Una vez encapsulado, el objeto existe en la mente del individuo y necesita la asignación de una etiqueta para el objeto (Dubinsky, Dautermann, Leron, & Zazkis, 1994). La etiqueta resultante, permite al estudiante nombrar el objeto y conectar dicho nombre con el proceso a partir del cual se construyó el objeto perseguido. Los objetos, se pueden desencapsular hacia el proceso desde el cual se formaron. Finalmente, las acciones, los procesos y los objetos se pueden organizar en esquemas (Asiala et al., 1996, p. 8).

2.1.4. Constructo mental de esquema

Para Meel (2003, p. 244), "los esquemas son estructuras de organización que incorporan acciones, procesos, objetos y otros esquemas que el estudiante invoca para resolver una situación problemática de las matemáticas". Asimismo, Barbosa (2003) considera que un *esquema* para un concepto matemático es una colección individual de acciones, procesos y objetos a los que se pueden agregar otros esquemas previamente construidos. Además, las diversas construcciones se encuentran conectadas, conscientemente o no, en una estructura coherente en la mente del individuo. La construcción de dichas estructuras requiere un mecanismo llamado *generalización*, el cual permite un alcance más amplio de la utilización del esquema (Meel, 2003). Según Dubinsky, Piaget se refiere a dicha construcción como una asimilación reproductiva o generalizada, y la llamó la generalización *extensional* (Dubinsky, 1991). Dicha generalización es la más simple y familiar de la abstracción reflexiva, debido a que se relaciona con la aplicación de un esquema ya existente para un nuevo conjunto de objetos.

Otro de los componentes principales en la teoría APOS es la *descomposición genética.* Cuando se realiza un análisis de los conceptos matemáticos en el que se ponen de relieve las construcciones cognitivas que pueden ser requeridas en su aprendizaje, a este proceso se le conoce como descomposición genética del concepto (Trigueros, 2005).

2.1.5. Diferentes clases de abstracción reflexiva en la construcción del conocimiento matemático

Durante el proceso de construcción del conocimiento, los niños pasan por diferentes estadios considerados por Piaget como tres tipos de abstracciones reflexivas. Dubinsky (1991, p. 101), considera cinco abstracciones reflexivas como métodos de construcción del pensamiento matemático avanzado:

Interiorización: según Dubinsky, Piaget denomina interiorización a la construcción de procesos internos como una manera de atribuir sentido a los fenómenos observados. Además, se refiere a esa construcción como "traducción de una sucesión de acciones materiales en un sistema de operaciones interiorizadas".

Coordinación: es un proceso cognitivo en utilizar dos o más acciones para construir un nuevo proceso o un nuevo objeto. Por ejemplo, la multiplicación es la adición de adiciones; además, para multiplicar, es necesario primero encapsular (mental) la acción en un objeto.

Encapsulación: es la conversión de un proceso (dinámico) en un objeto (estático). Es decir, es la transformación mental de un proceso dinámico en un objeto cognitivo estático. Este objeto puede ser visto como una entidad total y puede ser transformado mentalmente por otras acciones o procesos. Por tanto, decimos que el proceso ha sido encapsulado en un objeto cognitivo.

Generalización: es la construcción que se presenta cuando el sujeto aprende a aplicar un esquema pre-existente a una amplia colección de fenómenos. Meel (2003), considera que la *generalización* es la forma más simple y familiar de la abstracción reflexiva, debido a que se relaciona con la aplicación de un esquema ya existente para un nuevo conjunto de objetos.

Dubinsky y Lewin (1986) toman como ejemplo que la comprensión de los niños de la conmutatividad de la adición puede ser fácilmente extendida a la conmutatividad de la multiplicación. Luego, puede ser generalizada para incluir operaciones de conjuntos, tales como unión e intersección. Pero no todo es cierto, por ejemplo, en las operaciones de matrices no cumple la propiedad conmutativa.

Reversibilidad: esta construcción está presente cuando el sujeto es capaz de obtener un nuevo proceso invirtiendo un proceso interiorizado. Asimismo, la reversión es, esencialmente, la construcción de un proceso que es contraorden de un proceso internalizado (Meel, 2003).

2.1.6. La triada de Piaget: Intra–Inter–Trans

En su obra Psicogénisis e historia de la ciencia, Piaget y García (1982) presentan su tesis sobre la evolución de los esquemas, proponiendo tres etapas: *Intra*, *inter* y *trans*. Julie Clark et al. (1997) retomaron el trabajo de Piaget y García para analizar los mecanismos de la triada: *Intra*, *Inter* y *Trans*. La etapa *Intra*, se caracteriza por la concentración en un solo objeto en forma aislada de otras acciones, procesos u objetos. La etapa *Inter*, se caracteriza por el conocimiento de las relaciones entre las diferentes acciones, procesos, objetos y/o esquemas. Consideramos que es útil llamar pre-esquema a la colección que se encuentra en esta etapa de desarrollo. La etapa *Trans*, se caracteriza por la construcción de una estructura coherente que subyace a algunas relaciones descubiertas en la etapa inter de desarrollo.

La teoría APOS ofrece un marco teórico sólido para analizar y comprender los procesos de aprendizaje de las matemáticas. Al entender cómo los estudiantes construyen el conocimiento matemático, los docentes pueden diseñar estrategias de enseñanza más efectivas y personalizadas; así como, realizar investigaciones en el campo de las didácticas de las matemáticas.

2.2. Teoría de la comprensión de Pirie–Kieren

2.2.1. Introducción a la idea de comprensión

El conocimiento, la habilidad y la comprensión son el material que se intercambia en educación. La mayoría de los docentes muestran un fuerte compromiso con los tres. Pero la comprensión demuestra ser más sutil. Por cierto, no se reduce al conocimiento (Perkins, 1999, p. 69) y que el alumno que hábilmente resuelve problemas rutinarios de física o escribe párrafos con oraciones tópicas puede no comprender casi nada de física, de escritura o de aquello acerca de lo que escribe. Aunque el conocimiento y la habilidad pueden traducirse como información y desempeño rutinario, la comprensión escapa de estas normas simples.

David Meel (2003, p. 225), hace referencia a los trabajos de Browell y Sims (1946), para quienes la comprensión matemática era un concepto difícil de definir y explicaron que "es muy difícil de encontrar y formular una definición técnica exacta de comprender o comprensión". Además describieron como (a) la capacidad de actuar, sentir o pensar de manera inteligente respecto a una situación; (b) varía respecto al grado de exactitud e integridad; (c) varía respecto a la situación problemática que presenta; (d) necesita conectar las experiencias del mundo real y los símbolos inherentes; (e) necesita verbalizaciones, a pesar de contener significados menores; (f) desarrolla varias experiencias, en vez de la repetición de las mismas; (g) está influida por los métodos empleados por parte del maestro; y (h) es inferida por la observación de las acciones y las verbalizaciones.

Para David Meel (2003, p. 225), antes de 1978 la comprensión se identificaba con el conocimiento y se establecía a través del éxito frente a la resolución de problemas y operaciones algorítmicas. Luego a partir de 1978, según Meel el trabajo de Skemp introdujo la clasificación de la comprensión matemática en *relacional* como saber hacer, qué hacer y por qué se debe hacer, y la comprensión *instrumental* como tener reglas sin una razón explícita. Finalmente, Skemp, añade dos categorías denominadas lógica (organización de acuerdo a una prueba final) y simbólica (una conexión del simbolismo y notación con las ideas asociadas) (Meel, 2003, p. 226).

En cambio, George Pólya (1981, p. 23) identificó la comprensión como un elemento complementario a la resolución de problemas, y se expresó así:

> … se debe tratar de comprender todo, los hechos aislados mediante su recopilación con los hechos relacionados, los descubrimientos recientes a través de sus conexiones con lo ya asimilado, lo desconocido por analogía con lo acostumbrado, los resultados especiales mediante la generalización, los resultados generales por medio de la especialización adecuada, las situaciones complejas mediante la separación de las mismas en sus partes constituyentes y los detalles mediante la integración de los mismos dentro de una imagen total .

Otra manera de ver la comprensión es como construcción de concepciones operacionales y estructurales. Al respecto, Anna Sfard (1991) define la base de las matemáticas como dos entidades: *Concepto* y *concepción*. Un concepto se refiere a una idea real definida matemáticamente; y que una concepción involucra un grupo de representaciones y vínculos internos del aprendiz causados por el concepto. Además, para Sfard los conceptos matemáticos radican en su dualidad de su concepción, por lo que se puede ver como estáticos, instantáneos e integradores (estructurales, o dinámicos, secuenciales y detallados – operacionales) (Meel, 2003, p. 233). En tal sentido, una concepción operacional se relaciona con los procesos, algoritmos y acciones que ocurren a nivel físico o mental. Y una concepción estructural es más abstracta, más integrada y menos detallada que una concepción operacional (Meel, 2003, p. 233).

2.2.2. El modelo de Pirie y Kieren

El modelo es una estructura diseñada para la investigación y la ejecución de actividades en el proceso de aprendizaje. Pirie y Kieren (1989) desarrollaron su posición teórica respecto a la comprensión matemática, y sostienen que:

> La comprensión matemática se puede definir como algo estable pero no lineal. Es un fenómeno recursivo, y la recursión parece ocurrir cuando el pensamiento cambia los niveles de sofisticación. De hecho, cada nivel de comprensión se encuentra contenido dentro de los subniveles

subsiguientes. Cualquier nivel particular depende de las formas y los procesos del mismo y, además, se ve limitada por los que están fuera de él (1989, p. 8).

Dentro de la teoría de Pirie-Kieren, el conocimiento y la comprensión son más que un simple proceso de abstracción reflexiva de las experiencias sobre objetivaciones mentales. […] En la teoría de Pirie-Kieren, el desarrollo de la comprensión es visto como un proceso dinámico y activo que implica la construcción del mundo matemático para actuar sobre él (Pirie & Martin, 2000, p. 128).

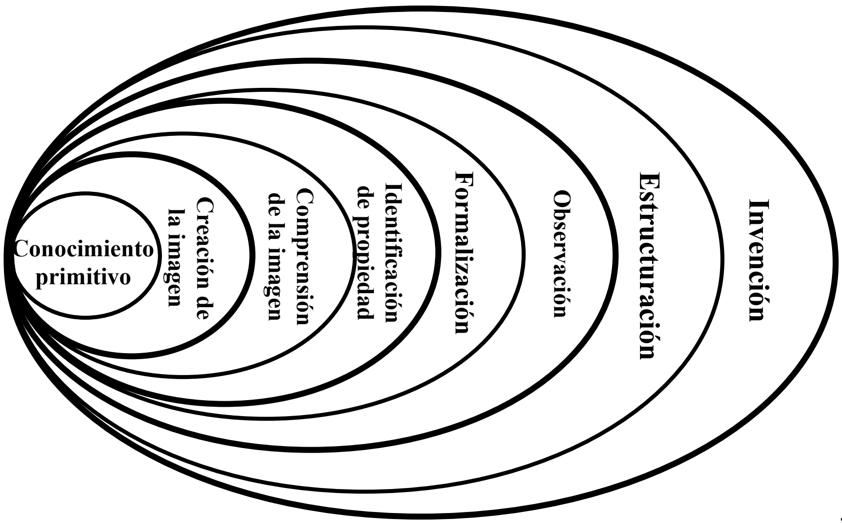
La teoría de Pirie-Kieren ha crecido y ha evolucionado hasta convertirse en una teoría que puede ser utilizada por un profesor o investigador como una herramienta para escuchar y observar en el contexto de la actividad matemática. Según Pirie y Martin (2000, p. 129), esta teoría nos ofrece una forma teórica de ver la comprensión cada vez más con mayor precisión lo que ocurre. Esto es un sistema por el cual un observador (un profesor o investigador) puede observar la comprensión no en términos de una adquisición personal o un estado adquirido; sino, como un proceso continuo (preferimos utilizar la palabra "conocimiento" para la adquisición estática). Asimismo, se trata de una herramienta teórica del pensamiento que una persona está plasmando con la comprensión matemática y que podrían estar interactuando con los estudiantes que están participando en las acciones de la comprensión.

2.2.3. Niveles de la comprensión

Para realizar la investigación o el proceso de aprendizaje de un determinado tópico específico, la teoría de Pirie y Kieren (1992), provee de ocho niveles para la comprensión, y son los siguientes: conocimiento primitivo (primitive knowing), creación de imagen (image making), comprensión de la imagen (image having), identificación de la propiedad (properties noticing), formalización (formalising), Observación (observing) estructuración (structuring) e invención (inventising).

Figura 4.

Niveles de representación diagramática del modelo para la evolución de la comprensión (Meel, 2003).



- *Nivel 1. Conocimiento primitivo*. Aquí los estudiantes traen conocimientos (información) previos al contenido a aprender. El término primitivo no se utiliza en el sentido de nivel más bajo o insignificante, sino como el primero de los elementos “importante” y “anterior”. Este conocimiento fue construido previamente fuera del contenido a aprender (Pirie & Kieren, 1992; Pirie & Martin, 2000).

  Al respecto, como observadores, es imposible conocer con precisión el conocimiento primitivo de otra persona. No obstante, podemos desarrollar diferentes interpretaciones basándonos en la evidencia disponible a través de sus acciones físicas, verbales o escritas.

- *Nivel 2. Creación de imagen*. Es cuando el estudiante es capaz de realizar distinciones con base en capacidades y conocimientos anteriores. Estas imágenes no son necesariamente "representaciones pictóricas", sino que transmiten el significado de cualquier tipo de imagen mental. Las acciones que se realizan en este nivel se relacionan con que el estudiante realice alguna actividad, mental o física, para obtener una idea sobre un concepto (Meel, 2003, p. 237). Por ejemplo, cuando los niños cortan objetos en las fracciones (Pirie & Martin, 2000, p. 130).
- *Nivel 3. Comprensión de la imagen*. Es la etapa en la que los alumnos ya no están ligados a las actividades de crear imágenes, ahora son capaces de llevar con ellos un plan mental para estas actividades y usarlo en consecuencia (Martin & Pirie, 2003, p. 174). Es decir, que una persona puede utilizar una construcción mental sobre un tema sin tener que hacer las actividades particulares que la han provocado (Pirie & Kieren, 1994, p. 170).
- *Nivel 4. Identificación u observación de la propiedad*. Es cuando el estudiante puede examinar una imagen mental y determinar los distintos atributos asociados con dicha imagen. Además de observar las propiedades internas de una imagen específica, el estudiante es capaz de observar las distinciones, combinaciones o conexiones entre las distintas imágenes mentales (Meel, 2003, p. 237). Aquellas imágenes que el alumno ha examinado y ha comprendido; ahora pueden articular las propiedades y las conexiones (Martin & Pirie, 2003, p. 174). Es decir, este cuarto nivel o modo de comprensión, se produce cuando uno puede manipular o combinar los aspectos de la construcción de imágenes, propiedades específicas y estructuras relevantes.
- *Nivel 5. Nivel de formalización*. En esta etapa el estudiante es capaz de reconocer las propiedades para abstraer las cualidades comunes de las clases de imágenes. En este estrato el estudiante tiene objetos mentales de clases similares construidos a partir de propiedades observadas, la extracción de las cualidades comunes y el abandono de los orígenes de la acción mental de la persona (Pirie & Kieren, 1989, p. 9). Para Meel (2003, p. 238) "la descripción de estos objetos mentales de clases similares tiene como resultado la producción de definiciones matemáticas completas".
- *Nivel 6. Nivel de observación*. Este nivel permite la capacidad de considerar y utilizar como referencia el pensamiento formal de la persona. Más allá de la relación del estudiante en la meta-cognición, el estudiante también es capaz de observar, estructurar y organizar los procesos de pensamiento personales, así como reconocer las ramificaciones de los procesos del pensamiento. En este nivel el estudiante puede producir verbalizaciones relacionadas con la cognición, sobre el concepto formalizado (Meel, 2003, p. 238) Una persona que está formalizando, también está en condiciones de reflexionar y coordinar la actividad formal, y expresar tales coordinaciones como teoremas (Pirie & Kieren, 1994, p. 171).
- *Nivel 7. Nivel de estructuración*. Ocurre cuando un estudiante trata de pensar sobre las observaciones formales como una teoría. Significa, que el estudiante es consciente que la colección de teoremas que está interrelacionado y requiere una justificación o verificación de estas proposiciones a través de argumentos lógicos o meta-matemáticos (Pirie & Kieren, 1994, p. 171). Para Meel (2003, p. 239) en "esta etapa el estudiante comienza a observar la relación entre distintos objetos [sic sujetos]; realiza ciertas preguntas sobre ideas subyacentes; axiomas y ejemplos; relaciona estas ideas subyacentes a través de varios dominios y percibe la interconexión de diversas teorías".
- *Nivel 8. Nivel de invención* (*inventising*). Este nivel originalmente conocido como invención (*inventing*), cuyo nombre cambió para distinguir las actividades asociadas con este nivel y las inversiones que puedan representarse en los niveles inferiores de la comprensión (Pirie & Kieren, 1994, p. 166). Además, dentro de este nivel una persona tiene la comprensión completamente estructurada, y por tanto, puede ser capaz de romper las preconcepciones acerca de esta comprensión y crear nuevas preguntas, el cual podría generar nuevos conceptos (1994, p. 171). Como resultado, dice Meel (2003, p. 239) que "el uso de la invención no implica que una persona no puede inventar en otros niveles, sino que utiliza para indicar la capacidad de liberarse del conocimiento estructurado que representa la comprensión total y crear preguntas totalmente nuevas que tendrán como resultado el desarrollo de un nuevo concepto". Sin embargo, "un objeto

> matemático, que se ha originado como un emergente del sistema de práctica que permite resolver un determinado campo de problemas, con el paso del tiempo queda enmarcado en diferentes programas de investigación. […] De esta manera, con el paso del tiempo aparecen nuevos sistemas de prácticas (sentidos) que amplían el significado del objeto” (Font Moll, 2005, p. 113).

En consecuencia, el desarrollo de la comprensión no es un proceso unidireccional; sino es un proceso *recursivo* y *evolutivo*. Además, el desarrollo de la comprensión, es un proceso de movimiento de ida y vuelta entre y a través de los niveles; por lo que se caracteriza a la comprensión, como un proceso organizacional y dinámico. Una consecuencia de esta línea de pensamiento es que, la estructura de la comprensión tiene una cualidad de tipo fractal (Meel, 2003; Pirie & Kieren, 1994), porque cada nivel externo opera a manera de envolvente de los niveles más internos.

Se puede describir cuando un estudiante alcanza el nivel de invención y ésta es como una etapa lograda, pero al mismo tiempo esta etapa se convierte su comprensión previa, como una nueva acción primitiva [Conocimiento Primitivo]. Una consecuencia importante de este enfoque es que la comprensión, desde la perspectiva de un observador, tiene una cualidad fractal. Por ejemplo, concebir el concepto de fracción en el nivel de educación primaria, en esta etapa los niños lograrán alcanzar los niveles ideales de la teoría comprensión; sin embargo, cuando el estudiante ingresa a la educación secundaria nuevamente se presenta el concepto de fracción, pero con mayor profundidad, entonces, lo aprendido en el educación primaria se convierte en conocimiento primitivo; así sigue el proceso cuando el estudiante llega a universidad el concepto de fracción se hace más compleja, donde lo aprendido en la educación secundaria se convierte en conocimiento primitivo, luego sigue así el proceso hasta llegar al nivel más alto de la teoría de la comprensión.

Por tanto, este proceso sigue una estructura fractal recursivo, porque los niveles externos crecen en forma recursiva desde los niveles internos, cuando el aprendizaje pasa por los diferentes niveles hasta alcanzar el nivel más alto; esto permite a avanzar a otro nivel, donde los niveles externos se insertan y envuelven a los internos.

2.3. El construccionismo de Papert y los objetos con los cuales pensar

El principal autor de esta teoría es Seymour Papert, matemático y eminente investigador principalmente en el campo de la matemática educativa del MIT. Se sabe que Papert trabajó con Piaget en Géneva entre los años 1950 hasta los inicios del año 1960, y fue considerado como el más brillante y exitoso discípulo recomendado por Piaget. Papert construye su modelo de aprendizaje usando la teoría cognitiva de Piaget, la teoría de inteligencia artificial, la investigación sobre las diferentes facetas sociales y afectivas involucradas en las matemáticas, la computación y las ciencias de la educación (Papert, 1980; Turkle, 1984; Minsky, 1986; citado por Harel, 1991).

En apariencia, tanto Piaget como Papert definen la inteligencia como la adaptación o la habilidad para mantener un balance entre la estabilidad y el cambio, cierra y abre, continuidad y diversidad, o en palabras de Piaget entre asimilación y acomodación. Ambos ven las teorías psicológicas como un intento de modelar a la gente y estabilizar sus dificultades. Pero, en un nivel más profundo, Piaget está más interesado principalmente en la construcción de la estabilidad interna, es decir, el génisis de la estabilidad mental interna y la capacidad del desarrollo cognitivo en sus diferentes niveles; en cambio, Papert está interesado en el cambio de dinamismo (Ackermann, 2004). Además, Piaget y Papert cuentan con similares objetivos, pero tienen diferentes significados. Piaget ve las diversas formas del conocimiento en términos de etapas, vemos diferentes enfoques del conocimiento como estilos de aprendizaje, y todos son igualmente válidos en sus propios términos (Turkle & Papert, 1990).

Seymour Papert y Marvin Minsky crearon el laboratorio de inteligencia artificial del MIT. Allí, construyeron un robot tortuga que ubicado en el suelo, se conectaba a una computadora; a través de ésta los niños programaban los movimientos de la tortuga en el lenguaje de programación Logo. Durante tres décadas de trabajo, los investigadores desarrollaron una teoría denominada *construccionismo*, teniendo como soporte un lenguaje de programación: el Logo.

Según Papert y Harel (1991), la definición más simple de *construccionismo* evoca la idea de aprender haciendo y esto es lo que estaba ocurriendo cuando los estudiantes trabajaban en sus esculturas de jabón en una clase que no es matemáticas, donde cada estudiante generaban sus propias fantasías. La otra idea es la más sutil, que llama "cercanías a los objetos", es decir, algunas personas prefieren formas de pensar que las mantienen cerca de las cosas físicas, mientras que otras usan medios abstractos y formales para distanciarse de los materiales concretos. Para Papert, estos dos aspectos de estilos son muy pertinentes con la idea de construccionismo.

Sin embargo, se puede diferenciar el construccionismo como una reconstrucción del constructivismo y como un enfoque filosófico como señala Papert y Harel (1991):

> Construccionismo —la palabra con N en oposición a la palabra con V— comparte la connotación constructivista de aprendizaje como "construcción de estructuras de conocimiento" independientemente de las circunstancias del aprendizaje. Luego, agrega la idea de que esto ocurre de manera especialmente exitosa en un contexto donde el aprendiz esta conscientemente comprometido a construir una entidad pública, ya sea un castillo de arena en la playa o una teoría del universo (pp. 1–11).

Resnick (2001) considera que en el construccionismo existen dos tipos de construcción. En el primero, el aprendizaje es un proceso activo mediante el cual las personas construyen activamente el conocimiento a partir de sus experiencias en el mundo (basadas en la teoría constructivista de Piaget). El segundo, agrega la idea de que los seres humanos construyen su conocimiento con particular eficacia cuando participan en la construcción de productos que son personalmente significativos, como castillos de arena, máquinas con Lego o programas de computación. Según Kafai y Resnick (1996, p. 2), el construccionismo no es un conjunto de ideas estáticas. Esto significa que existen cambios en todas las direcciones, porque los investigadores están continuamente actualizando, reconstruyendo nuevas actividades educativas y nuevas herramientas.

Finalmente, se puede concebir el construccionismo desde una perspectiva mucho más amplia como sostiene George Jachewatzky-Hashaviah (2011), que el construccionismo es un enfoque filosófico y, a la vez, es un método y una praxis educativo. Se construye en y deviene de la naturaleza misma en toda la biosfera de esta pelotita que llamamos "tierra" (*aunque la mayor parte de ésta es agua*…) desde hace más de 4 mil millones de años… El Construccionismo es, por ende, una actividad natural y biológica antes que un enfoque filosófico o un paradigma teórico o un método práctico. Al instrumentar el construccionismo, estamos devolviendo lo "natural" a la actitud, acción y hecho de "aprender" (o de *construir, adquirir, desarrollar y actualizar* cuerpos o sistemas de *conocimientos, comprensiones, actitudes y aptitudes*).

2.3.1. Filosofía del lenguaje de programación Logo

A finales de la década de los 60, Seymour Papert desarrolla junto con sus colaboradores del laboratorio de inteligencia artificial del MIT, un lenguaje para ordenadores que denomina Logo. Siendo ésta una alternativa que posibilita el uso de ordenador para apoyar el aprendizaje desde los primeros niveles (Cajaraville Pegito, 1989, p. 111).

El lenguaje de programación Logo es uno de los primeros lenguajes desarrollados en el campo de la educación; el lenguaje Logo fue el pilar y base del construccionismo de Papert. Hereda la filosofía del lenguaje de programación de la versión pura de Lisp (Murray-Lasso, 2005, p. 177), Lisp 1.5 (List programming) que dio origen a Logo, y es usado por muchos en el campo de la inteligencia artificial por su funcionalidad en el procesamiento de listas (Sammet, 1972, p. 603).

Tanto el construccionismo como el Logo se sustentan en la teoría de Piaget; sin embargo, a diferencia de Piaget, Papert atribuye mayor importancia al efecto del medio en que se desenvuelve el aprendizaje (Cajaraville Pegito, 1989; Papert, 1982), y a la idea de la resolución de problemas; ya que al igual que Polya está en desacuerdo con la enseñanza sobre números y gramática que se producen en la escuela, ya que no se les enseñan a pensar (Papert, 1995, p. 100), porque la mejor manera de aprender es haciendo.

Según Papert (1980a, 1982, pp. 17–18), en todo el mundo, grandes industrias están produciendo los llamados software educativo para instrucción asistida por computadora para enseñar a los niños (podría decirse que la computadora se utiliza para programar al niño). En cambio, con Logo los niños pueden hacer su propio software educativo (el niño programa la computadora), y al diseñar el software, aprenden mucho y adquieren un dominio sobre una de las tecnologías más modernas y poderosas.

Papert estimula el uso de Logo no sólo como lenguaje de programación, sino como filosofía educativa, al sostener que la cultura Logo enriquece la interacción entre los estudiantes y los maestros, […] además, los innovadores educacionales deberían ser antropólogos sensibles a la cultura circundante para utilizar su dinámica en sus intervenciones educativas; porque al realizar actividades y programaciones con Logo, estas están acompañadas por un tipo de reflexión epistemológica; además los ambientes Logo se aparecen a las escuelas de samba en algunos aspectos. La semejanza más profunda proviene que en ellos la actividad matemática es una actividad real compartida por novatos y expertos. La actividad es tan variada y tan rica en descubrimientos (Papert, 1982).

Una de las características fundamentales de partida de Logo fue popularizar la "geometría de la tortuga" basada en las propiedades intrínsecas de las figuras; asimismo la simplicidad que ofrece para construir un vocabulario propio. Las funciones principales de la programación fueron (a) *primitivas* (función base), que transmite una orden específica (conceptos de primer orden) a la computadora; (b) los *procedimientos*, permiten establecer conceptos de orden superior; y (c) procedimientos *recursivos*, que permite abreviar la ejecución de los procedimientos, siendo ésta una herramienta poderosa (Cajaraville Pegito, 1989, p. 113).

2.3.2. Filosofía y epistemología del construccionismo

El Construccionismo es una filosofía de la educación; sostiene que los niños aprenden haciendo, explorando y descubriendo, en lugar de recibir una información pre-envasada (Papert, 1986). Es un proceso guiado y de colaboración en el que incluyen comentarios de sus compañeros, no solo de los maestros (Kayton, Vosloo, & Sparks, 2008). En este caso, ambos se refieren al aprendizaje de los contenidos de matemáticas u otras áreas de las ciencias mediante las construcciones y reconstrucciones y no como una simple transmisión de la información a los alumnos.

Para Turkle y Papert (1990, p. 129), en el construccionismo la palabra epistemología tiene un sentido más cercano a Piaget que a la del filósofo. En el uso tradicional, el objetivo de la epistemología es indagar sobre la naturaleza del conocimiento y las condiciones de su validez. En cambio, la epistemología del construccionismo tiene como base la epistemología de Piaget, que investiga dentro de la naturaleza el conocimiento, y hace un estudio comparativo de las diversas clases de conocimiento, encontrada en las diferentes edades de los niños. Además, Papert dice que difiere de Piaget en un punto muy importante: si Piaget ve las diversas formas del conocimiento en términos de estadíos desde un punto de vista formal, Papert las diferentes aproximaciones al conocimiento como estilos, y cada estilo igualmente validado con sus propios términos (Turkle & Papert, 1990).

2.3.3. El construccionismo como teoría de aprendizaje

Kafai y Resnick (1996), consideran al *construccionismo* como una teoría de aprendizaje y una estrategia para la educación. Se construye sobre el constructivismo de Piaget y afirman que el conocimiento no es la simple transmisión de profesor a alumno; sino es activamente construido en la mente del aprendiz. Los niños no consiguen ideas; ellos hacen nuevas ideas. La teoría sugiere que los aprendices probablemente realicen actividades para generar nuevas teorías cuando participan activamente en la realización de algún tipo de artefacto externo que se puede reflexionar y compartir con los demás (Bouras, Poulopoulos, & Tsogkas, 2010; Papert & Harel, 1991).

Para Bull (2005), Papert, como matemático y teórico educacional que trabajó en un rico ambiente tecnológico, considera a la computadora parte de la tecnología educacional y sugiere que podría servir como un medio para "pensar sobre el pensamiento", debido a que las computadoras son portadoras de gérmenes o semillas culturales que pueden ejercer una poderosa influencia en el pensamiento de las personas (Papert, 1982). El construccionismo es, en parte una teoría de comprensión de cómo la gente aprende más efectivamente construyendo, creando y diseñando sus propios materiales para aprender (Berland, 2009; Papert, 1982). Por tales razones, se considera que una de las herramientas imprescindibles para el aprendizaje de los estudiantes son los ordenadores y el lenguaje de programación, con los cuales los niños construyen sus conocimientos y aprenden conceptos muy avanzados.

En tal sentido para Papert, el aprendizaje significa la invención y la formulación de reglas y conceptos a través de procesos activos de pensar y lo que uno hace, cómo uno hace, y cómo uno se siente acerca de dicho objeto durante el desarrollo intelectual o diferentes etapas dentro de la resolución de problemas. A diferencia de Piaget, Papert ve el aprendizaje como algo particularmente efectivo cuando este toma lugar en un contexto rico de una actividad concreta, en el cual el sujeto (ya sea niño o adulto) construye significativamente su experiencia tal como un trabajo de una pieza de arte, una historia o un reporte de investigación (Harel, 1991).

Para Papert, la actividad de ensayar, errar, corregir el error (ensayo – error) conduce a los niños y a las niñas a crear y aprender. A este acto lo denomina un proceso de depuración (corrección del error). Además, hace mención que "… los errores nos benefician porque nos llevan a estudiar lo que sucedió, a comprender lo que anduvo mal y a través de comprenderlo a corregirlo" (Papert, 1987, pp. 135 – 136; citado por Badilla y Chacón, 2004).

Finalmente para Badilla y Chacón (2004), el construccionismo aborda tres conceptos clave: objetos con el cual pensar, entidades públicas y micromundos.

2.3.3.1. Objetos con los cuales pensar

El construccionismo de Papert parte de la concepción del aprendizaje; según esta, la persona aprende por medio de la interacción dinámica con el mundo físico, social y cultural en el que está inmerso (Papert & Harel, 1991). Además, Papert considera la premisa de que en las escuelas, las clases se desarrollan bajo una instrucción en la que existe transferencia direccional de conocimiento de profesor a los alumnos. También cree que el aula es un ambiente artificial e ineficiente que la sociedad se ha visto obligada a inventar debido a que sus ambientes informales fallan en ciertos dominios esenciales del aprendizaje, como la escritura, la gramática o la matemática escolar.

Según Papert (1982), las escuelas tal como lo conocemos hoy, no tendrán lugar en el futuro. Él centra especial atención en las actividades que los niños hacen con *objetos con el cual pensar* (objects-to-think-with), en un espacio totalmente diferente interactuando con los ordenadores. Si para Piaget y Papert el conocimiento se construye; entonces, la educación consiste en proveer las oportunidades para que los niños se comprometan en actividades creativas. Papert dice; que "el mejor aprendizaje no derivará de encontrar mejores formas de enseñar, sino de ofrecer al educando mejores oportunidades para construir" (Falbel, 1993)

2.3.3.2. Entidades públicas

Papert elabora su teoría sobre la base del pensamiento de Piaget, analizando cómo aprenden los niños en la era digital, y así construye la teoría del construccionismo. En otras palabras, "construccionismo es con N opuesto a la letra V del constructivismo, donde el aprendizaje es la construcción del conocimiento mediante la progresiva internalización de acciones… Además, añade la idea de que esto sucede cuando el estudiante conscientemente está dedicado a construir en una **entidad pública**, como cuando se trata de construir un castillo de arena en la playa o una teoría del universo" (Papert & Harel, 1991).

Para Vicario (2009), una entidad pública refiere a las construcciones que realizan los estudiantes diseñando para ser mostradas, discutidas, examinadas, probadas y que permiten representar visual o auditivamente ideas y conceptos para experimentar con ellos, con lo que el objeto creado, al compartirse con los demás se convierte en una entidad pública que refuerza el aprendizaje construccionista alcanzado.

2.3.3.3. Micromundos

La introducción y propagación de la tecnología informática en las escuelas desde 1980 en los EE.UU, han dado lugar a la creación de un nutrido surtido de software educativo, la mayoría tiene funciones instructivas. Sin embargo, surge otro grupo mucho más pequeño, conocido como "micromundo", se basa en principios muy diferentes, los de la invención, el juego y el descubrimiento (Rieber, 2004, p. 1).

La concepción formal de *micromundo* en la tecnología informática, aparece por primera vez en el libro editado por Taylor, "*The computer in the school: Tutor, tool, tutee*". La contribución de Papert es que las "computadoras basadas en micromundos son como incubadoras de ideas poderosas"; donde Papert (1980, p. 204) considera que un subconjunto de la realidad o una realidad es construido cuando la estructura coincide con la de un mecanismo cognitivo, además la realidad proporciona un entorno para que el mecanismo cognitivo funcione eficazmente. En el concepto subyace la idea de un proyecto que invente micromundo que sean estructurados para permitir que un aprendiz humano pueda ejercer determinadas ideas poderosas o habilidades intelectuales.

Papert considera que para alcanzar este propósito es necesario diseñar nuevos ambientes de aprendizaje; estos son denominados "micromundo", que incluyen herramientas para la exploración (*objetos con los cuales pensar*) que lleva a la construcción de conocimientos. Badilla y Chacón (2004, p. 8) resaltan que "un micromundo constituye por sí mismo una entidad pública que utiliza como herramientas para su construcción objetos con los cuales pensar". Ackermann (2004), sostiene que Papert ha pasado parte de su vida creando entornos tecnológicos o micromundo, donde los niños pueden pasar el tiempo hasta con ideas riesgosas, en un terreno seguro. Por tanto, consideramos que un micromundo es un ambiente donde los niños pueden explorar, construir y reconstruir; hacer simulaciones, realizar experimentos, construir historias que los lleven a construir su conocimiento.

Uno de los principales postulados del construccionismo es que los alumnos *construyen* y *reconstruyen* activamente sus conocimientos de sus experiencias en el mundo (Kafai & Resnick, 1996, p. 2), y que el aprendizaje en ambientes del construccionismo alienta múltiples estilos de aprendizaje y representaciones del conocimiento. En lugar de dar a los estudiantes conocimientos transmitidos por generación; el objetivo, es dar a los estudiantes los recursos y herramientas para construir y perfeccionar sus conocimientos muy significativos.

Por lo tanto, la epistemología que subyace a micromundo es el construccionismo. Porque la perspectiva construccionista otorga importancia a la interacción del individuo y el mundo circundante (la sociedad y la naturaleza); entonces el aprendizaje se caracteriza por la construcción y reconstrucción mediante la interrelación con el mundo real.

2.3.4. El uso de las tecnologías en el aprendizaje de las matemáticas

Con la aparición del ordenador, la educación ha empezado a tener mejores expectativas; sin embargo, el uso de las tecnologías no es reciente en el campo educativo, un ejemplo de la antigüedad, es el *ábaco* con más de 3000 a.C., su uso estaba orientado a realizar cálculos matemáticos. En nuestros tiempos, esta máquina del pasado se ha reactualizado y se utiliza en el campo de la educación. Según Bliss (1999), el aprendizaje, el razonamiento y el pensamiento se realizan en diferentes contextos sociales y tecnológicos, y la manera como ellos practican con los artefactos ayuda a determinar la forma en que las personas aproximan sus situaciones.

La informática educativa comienza en 1958 con el trabajo del psicólogo B.F. Skinner, denominado "Máquinas de enseñar"; esto dio origen a la enseñanza programada (Smith, 1994). A partir de los años 60 del siglo pasado tuvieron lugar las primeras experiencias en la utilización de ordenadores en el campo educativo (Levis, 2007). Hace más de veinte años, se comenzaron a introducir las nuevas tecnologías en el aula de matemáticas. Primero, fueron las calculadoras; después las calculadoras gráficas y, en los últimos años, *software* de cálculo simbólico ejecutado en un ordenador personal (Codes & Sierra, 2005).

De acuerdo a los Principios y Estándares para la Educación Matemática NCTM (2000, p. 24) y la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales" y NCTM (2003, p. 26), "la tecnología es fundamental en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; influye en las matemáticas que se enseñan y enriquece su aprendizaje".

En la actualidad el uso de los ordenadores, dispositivos móviles (celular, tablets y dispositivos electrónicos) y la masificación de internet generaron la expansión cultural y social de la informática. Sin embargo, aún no está claro sus fines en el campo educativo. Dantel (2003, p. 7), hace referencia al uso de la tecnología:

> Instalar buenos computadores y conexiones a Internet en las aulas no es suficiente. También se deben saber utilizar en la forma apropiada. Esto significa que las escuelas deberán cambiar su metodología y encontrar nuevas modalidades de transmisión de conocimientos. […] Las nuevas tecnologías son muy prometedoras y capaces de revolucionar el aprendizaje, pero solo en la

> medida que sus actores se proporcionen a sí mismos los medios para lograrlo. Como cualquiera otra herramienta, todo depende de lo que se haga con ella. (p.7).

A Papert, debemos la introducción de los ordenadores como herramientas de aprendizaje de los niños, por lo que se podría considerar el padre de la informática educativa. El uso de los ordenadores y de otras tecnologías de la comunicación permite imaginar nuevos modos de enseñar y de aprender, ser capaces de conducir la educación hacia caminos menos tortuosos de los que atraviesa en la actualidad (Levis, 2007). Comenta Papert, en una entrevista realizada por Bennahum (1996), que los niños ahora pueden realizar cosas mucho más complejas gracias al uso de las computadoras. Entonces, estas computadoras son más que catalizadores; son el instrumento mismo que hace posible el conocimiento.

Desde los años 80 del siglo pasado, se inició en España el uso de la tecnología de información en los centros educativos. Se institucionalizó con el "Proyecto Atenea" y el "Proyecto Mercurio", impulsados por el Ministerio de Educación y Ciencia; luego, surge el programa "Nuevas Tecnologías de la Información y Comunicación" (PNTIC). De forma paralela, distintas comunidades autónomas con competencias plenas en materia educativa también crearon sus propios planes dirigidos a impulsar el uso de los ordenadores en el marco escolar.

Se considera que existen muchos factores perjudican en la introducción y uso de las tecnologías en la educación, y aún más en el campo de la enseñanza de las matemáticas, según EACEA/Eurydice (2011, p. 11), el uso de las TIC se admite en todos los países de Europa; sin embargo, en una encuesta a nivel internacional muestran que no utilizan con frecuencia las TIC en las clases de matemáticas. Asimismo, para Vinagre (2010, p. 19), "el modelo pedagógico del sistema educativo español hace hincapié en la transmisión de teorías y conceptos y *no* incluye entre sus objetivos prioritarios el aprendizaje autónomo, el conocimiento instrumental, el aprendizaje basado en problemas o el desarrollo de las habilidades sociales y comunicativas, competencias fundamentales que demanda la nueva sociedad del conocimiento". Esta afirmación puede relativizarse, porque desde la óptica de la Transposición Didáctica, el profesor realiza la re-contextualización (transformaciones) del objeto matemático a aprender para realizar el proceso de enseñanza mediante el contrato didáctico (Chevallard, 2000).

Para Papert (1982), en muchas escuelas, la frase "instrucción asistida por computadora" significa hacer que la computadora enseñe al niño. Podría decirse que *se utiliza la computadora para programar* al niño; y que en nuestros días sigue vigente esta idea. El uso de los ordenadores debe concebirse de una manera diferente. Como dice Papert (1982, p. 18), "en mi concepción, el *niño programa la computadora* y, al hacerlo, adquiere un sentido de dominio sobre un elemento de la tecnología más moderna y poderosa y, a la vez establece un íntimo contacto con algunas de las ideas más profundas de la ciencia, la matemática y el arte de construcción de modelos intelectuales".

Para Dubinsky (2000), existen diferentes formas de usar los ordenadores para ayudar a los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas y cada una tiene sus ventajas y desventajas; asimismo, cualquier lenguaje de programación o software es pertinente su uso. Por lo tanto, en el transcurso del tiempo con el cambio y desarrollo de las tecnologías, es posible el uso de las tecnologías en las investigaciones, ya que el uso de los ordenadores como herramienta de aprendizaje en las ciencias, nos brinda la ventaja de ser un ambiente de aprendizaje interactivo; ya que los medios digitales desde el marco del construccionismo son herramientas sociales que promueven la democratización, la igualdad y las formas de relacionarse, organizarse, aprender, crear, transformarse, producir, procesar información, valorarla y convertirla en conocimiento. Para un buen funcionamiento es necesario encontrar nuevas fórmulas educativas que se adapten a la realidad virtual en la que viven los alumnos en la actualidad (Piscitelli, 2011).

La educación digital en entornos vulnerables, plantea una serie de desafíos interrelacionados. La enseñanza de las matemáticas en la actualidad, al ser incorporada a este contexto digital, no se encuentra exenta de estas dificultades; sin embargo, luego de la pandemia COVID 19, el desarrollo de las actividades educativas en el mundo se ha virtualizado. En ese contexto, han aparecido diversas plataformas especializados en la enseñanza de las matemáticas como Khan Academy (Vaca González et al., 2021) y otros, así como herramientas que permitan su gestión.

Por otra parte, la inteligencia artificial (IA), en estos últimos años ha trastocado las bases de la educación en sus diferentes niveles; por lo que organismos como la UNESCO ha emitido documentos que regulan el uso adecuado de la IA en la educación como producto del Consenso de Beijing sobre la inteligencia artificial y la educación (UNESCO, 2023a, 2023b). Desde el ingreso en escena la IA, en la educación matemática existen diversas experiencias sobre la incorporación de la IA, al respecto, en un estudio de revisión realizado a 20 investigaciones en diferentes bases de datos como ScienceDirect, Scopus, Springer Link, ProQuest y EBSCO Host publicados entre 2017 y 2021; los hallazgos indican que el uso de la IA en la educación matemática fue a través de robótica, sistemas, herramientas, agente enseñable, agente autónomo y un enfoque integral (Mohamed et al., 2022); otros consideran a la IA como una herramienta potencial que ayuda al profesor en gestionar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática (Orhani, 2021), así como, para incrementar la motivación de los alumnos por aprender, personalizar el aprendizaje y profundizar en la comprensión de los conceptos (Maulida et al., 2024). Es un reto desarrollar investigaciones más profundas en el campo de la educación matemática con enfoques de las diversas teorías y que nos permite tener una visión clara de su real aplicabilidad desde un marco pedagógico y ético.

3. TEORÍAS SOCIAL CONSTRUCTIVISTAS DE LA DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

La preocupación por la enseñanza de las matemáticas no es reciente, D'Amore (2008) cita a Comenius (1657) al referirse a la *grande didáctica* «como un único método para enseñar las materias… las artes, las ciencias y lenguas»; fueron necesario siglos para establecer un modo definitivo y librarse de esta concepción en la que contenido y método no estaba diversificado en función de las características del objeto de conocimiento y para que las didácticas específicas puedan asumir su estatus como tal.

Según Törner & Sriraman (2005, p. 198), el principal de estos primeros teóricos fue Adán Reise "el aritmético" que ha destacado cálculos manuales como un proceso de aprendizaje fundamental en las matemáticas. Este énfasis se encuentra en los clásicos pedagógicas del siglo XIX escrita por Johann Friedrich Herbart (1776-1841), Hugo Gaudig (1860-1923), Georg Kerschensteiner (1854-1932) (véase Jahnke, 1990; Führer, 1997; Huster, 1981). En los primeros años del siglo XX, Féliz Klein (1849) y Hans Freudenthal (1905-1990) (origen alemán) se interesó por las complejidades de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en las escuelas. La influencia de este enfoque se hizo eco en la década de 1960, en la didáctica de las llamadas enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria que sirvió de aprendizaje y pre-requisito para las matemáticas en las escuelas secundarias.

La evolución de la didáctica de las matemáticas, según Josef Gascón (1998, p. 7) "está determinada por sucesivas ampliaciones de la *problemática didáctica*. Cada una de estas ampliaciones comporta cambios de su *objeto primario de investigación* y, en consecuencia, modifica la naturaleza de la didáctica como disciplina científica". Es necesario diferenciar términos. En efecto, para Godino (1991, p. 136) el término educación es más amplio que el de didáctica y, por tanto, se distingue entre Educación Matemática y Didáctica de la Matemática; sin embargo, en el mundo anglosajón se emplea la expresión "Mathematics Education" para referirse al área de conocimiento que en Francia, Alemania, España, etc. se denomina Didáctica de la Matemática.

Siendo el fin de la matemática educativa, las investigaciones sobre el estudio de dos componentes, la enseñanza y el aprendizaje, es necesario enmarcarse dentro de paradigmas consolidadas. En tal sentido surgen dos puntos de vista. Desde los inicios de la didáctica de las matemáticas como disciplina, fue consolidándose un primer enfoque sistemático, que considera el aprendizaje en general, y el de las matemáticas en particular, como un *proceso psico-cognitivo* fuertemente influenciado por *factores motivacionales*, *afectivos* y *sociales* (Gascón, 1998, p. 3).

Frente a una serie de limitaciones de este primer enfoque al que Brousseau denominó teoría clásica (Gascón, 1998); se amplía la problemática y se obtiene un nuevo objeto de estudio. Se trata de un conjunto de fundamentos que requieren una base multidisciplinar que englobe la pedagogía, la epistemología de las matemáticas, la sociología, psicología educativa, y otras disciplinas. En esta corriente, se sitúan en primer lugar, la teoría de situaciones didácticas (TSD) de Guy Brousseau; teoría antropológico de lo didáctico (TAD) de Chevalard; la ingeniería didáctica de Michèle Artigue y el enfoque ontosemiótico (EOS) de Godino, entre otras teorías (J. D. Godino, 1991, p. 124).

A pesar de las limitaciones del enfoque cognitivo señaladas por Gascón (1998) nuestra investigación está relacionada en primer lugar con la teoría de cognitiva del aprendizaje, tomando como principal fundamento la teoría constructivista de Jean Piaget[1]. En segundo lugar, con las teorías de corte epistemológico en Didáctica de las Matemáticas, como la TSD, la TAD, el EOS y la socioepistemología basados en el constructivismo social. La teoría cognitiva, es el principal soporte en el trabajo de investigación, porque, a través del constructivismo como teoría, se propuso desarrollar actividades centradas en la interacción de las situaciones con el entorno real, donde los niños/as realizan experiencias con el fin construir el conocimiento haciendo uso de las Tecnologías de Información y Comunicación (TIC). Además, la Didáctica de las Matemáticas, nos permitió identificar aspectos como las dificultades, errores y obstáculos epistemológicos que los estudiantes tienen durante el proceso de la enseñanza y aprendizaje; así como la organización de los contenidos. Sin embargo, consideramos que ambos son elementos complementarios, una con mayor presencia que la otra y que dan soporte al trabajo de investigación.

3.1. Teoría de situaciones didácticas (TSD)

La TSD analiza cuales son las interacciones que se presentan en el aula entre los actores del proceso enseñanza aprendizaje. Los términos que utilizan son la transposición didáctica, fenómenos didácticos, situaciones: fundamental, didáctica y a-didáctica, contrato didáctico, variable didáctica, obstáculos y errores, entre otros.

Una situación es un modelo de interacción entre el sujeto y un medio determinado; y la situación didáctica es todo el entorno del alumno, incluidos el docente y el sistema educativo (Brousseau, 2007). Es decir, una situación didáctica de aprendizaje comprende el proceso en el cual el docente proporciona el medio didáctico en donde el estudiante construye su conocimiento**.** La *Situación A-Didáctica* es el proceso en el que el docente le plantea al estudiante un problema que asemeje situaciones de la vida real (Chavarría, 2006).

Uno de los principales ejes es la modelización de las situaciones en didáctica; para tal efecto se clasificaron en cuatro situaciones diferentes (Brousseau, 2007, pp. 24-28): acción, formulación, validación e institucionalización.

Dadas la forma de modelización de las situaciones didácticas aparecen dos configuraciones que subyace la modelización. 1. situación a-didáctica: situación donde el alumno/a acepta como suyo el problema y produce su respuesta, sin intervención docente (conjunto de relaciones establecidas explícita o implícitamente entre un alumno o grupo de alumnos y el profesor de modo que estos adquieran un saber constituido o en constitución). 2.- situación fundamental: cada conocimiento matemático posee al menos una situación que lo caracteriza y lo diferencia de los demás (Salinas Muñoz, 2010).

Otro de los elementos principales de la TSD es el Contrato Didáctico, se refiere a la consigna establecida entre profesor y alumno, comprende el conjunto de comportamientos que el profesor espera del alumno y el conjunto de comportamientos que el alumno espera del docente. Para Godino, Batanero y Font (2003),

> "el 'contrato didáctico' regula los derechos y obligaciones del profesor y los alumnos. Es el resultado de un proceso de negociación entre los alumnos, el profesor y el medio educativo. Uno de los componentes esenciales del contrato didáctico son los criterios de evaluación explícitos, pero hay otros no explicitados que sólo se detectan cuando el profesor plantea actividades poco habituales que vulneran las reglas del contrato, lo cual produce el consiguiente desconcierto en los alumnos. Los alumnos, en su adaptación al medio escolar, llegan a desarrollar un sentido que les permite captar cuáles son las reglas del contrato didáctico en cada caso" (p. 68).

Por lo tanto, al proceso de las obligaciones reciprocas de profesor y alumno bajo un conjunto de reglas (con frecuencia no enunciadas explícitamente), se denomina contrato didáctico, que es específico para el contenido enseñado, y para el logro del conocimiento objetivo de la matemática (Brousseau, 1997, p. 32).

[1] El constructivismo es visto desde distintas posturas, tales como el constructivismo radical de Ernest Von Gasersfeld y constructivismo dialéctico de los neopiagetianos.

Por otro lado, debido a las características del conocimiento matemático que incluye conceptos, sistemas de representación simbólica y procedimientos de desarrollo y validación de nuevas ideas matemáticas, Brousseau identifica cuatro tipo de situaciones: *situaciones de acción*, sobre el medio que permite el surgimiento de teorías; *situaciones de formulación*, que permite la adquisición de modelos y lenguajes explícitos; *situaciones de validación*, requieren de los alumnos la explicitación de pruebas y por tanto explicaciones de las teorías relacionadas, medios que subyacen en los procesos de demostración; y *situaciones de institucionalización*, que tiene por finalidad establecer y dar un "status" oficial a algún conocimiento aparecido durante la actividad de la clase (Godino, 1991).

Algunos fenómenos ligados a la situación didáctica han podido ser puestos en evidencia, Brousseau identifica el efecto Topaze como aquella circunstancia en donde el estudiante llega a la solución de un problema, pero no ha sido por sus propios medios, sino porque el profesor asume la resolución del problema. Éste último ve las dificultades que tiene un grupo para llegar a la resolución de un problema, por lo cual se ve en la necesidad de indicar cuál es el procedimiento que deben seguir. Con ello no permite la construcción de conocimiento por parte de los estudiantes. En cambio, el efecto Jordain consiste en la actitud que toma el profesor cuando un estudiante da una respuesta que es incorrecta, no obstante, para no desilusionarlo le dice que "está bien", que es la respuesta correcta. Entonces, un comportamiento banal del alumno es asumido como un conocimiento válido (Chavarría, 2006).

El término *obstáculo epistemológico* fue acuñado por primera vez por el filósofo francés Gaston Bachelard en 1938. Guy Brousseau (1997, p. 84), retoma el concepto de obstáculo y lo adapta al dominio de la matemática dentro de su teoría de las situaciones didácticas, y se manifiesta en errores, que no son debidos al azar, sino que son reproducibles y persistentes. Aquellos errores no desaparecen completamente de una sola vez; se resisten, persisten, luego reaparecen, se manifiestan mucho tiempo después de que el sujeto ha rechazado el modelo defectuoso de su sistema cognitivo consciente (Brousseau, 1997, p. 84).

Los obstáculos se clasifican según su origen. El obstáculo *ontogénico*, es cuando los estudiantes tienen limitaciones en el desarrollo de conocimientos apropiados a sus habilidades y objetivos teniendo en cuenta su edad. Los obstáculos de origen *didáctico* son los que parecen depender sólo de una elección o proyecto dentro de un sistema educativo. Y los obstáculos de origen *epistemológico* son aquellos de los cuales uno no puede ni debe escapar, debido a su papel formativo en el conocimiento que se busca. Se pueden encontrar en la historia de los mismos conceptos. Esto no quiere decir, que hay que amplificar su efecto o reproducir en el contexto escolar las condiciones históricas (Brousseau, 1997, pp. 86-87).

Luego, Chevalard (1989) ha adoptado una posición de notable generalidad para los estudios de Didáctica. Desde una perspectiva antropológica, la Didáctica de la Matemática sería el estudio del hombre (las sociedades humanas) aprendiendo y enseñando matemáticas. Sin embargo, Godino (1991) sugiere que para el éxito del programa se debe tener en consideración un conjunto de condicionantes (cognitivos, culturales, sociales, inconscientes, fisiológicos, etc.) del alumno, que juegan o pueden jugar un papel en la formación de su relación personal con el objeto de su saber en cuestión.

3.2. Teoría antropológico de lo didáctico (TAD)

la Teoría Antropológica de lo Didáctico propuesta por Chevallard, a inicios del 1990, está inspirada en la atención que ha centrado el investigador en las actividades de las personas implicadas en la materia de análisis, que no es solo resolver problemas, sino en comunicar la matemática como tal (Rodriguez, 2011). En este sentido, el estudio de las concepciones epistemológicas de los docentes cobra especial relevancia, por su influencia en el proceso enseñanza-aprendizaje, y en la relación del docente con el estudiante, durante su proceso formativo.

La Teoría de Transposición Didáctica, para Chevallard (2000, p. 469) se refiere a la transformación de un contenido de saber preciso en una versión didáctica de ese objeto de saber, puede denominarse más apropiadamente "transposición didáctica *strictu sensu"*. El primer eslabón marca el paso de los implícito a lo explícito, de la práctica a la teoría, de lo preconstruido a lo construido.

Para Chevallard los *objetos de saber*, son los que el profesor de matemáticas debe poseer. Las nociones matemáticas como categorías (definición, propiedades), así como las paramatemáticas que son *nociones-herramientas* de la *actividad matemática* (Chevallard, 2000, pp. 57–58).

Una vez realizadas las transformaciones del objeto del saber; el objeto a enseñar es diferente del saber sabio, pues es el nuevo contenido que podría denominarse como el saber sabio que el alumno/a va adquirir y que es diferente al significado original, ya que para introducirlo en el proceso de la enseñanza se han incorporado una serie de conceptos con el objetivo de que sea comprensible en el acto educativo. En tal sentido, la expresión transposición didáctica hace referencia a la modificación que el conocimiento matemático sufre para ser adaptado como objeto de enseñanza.

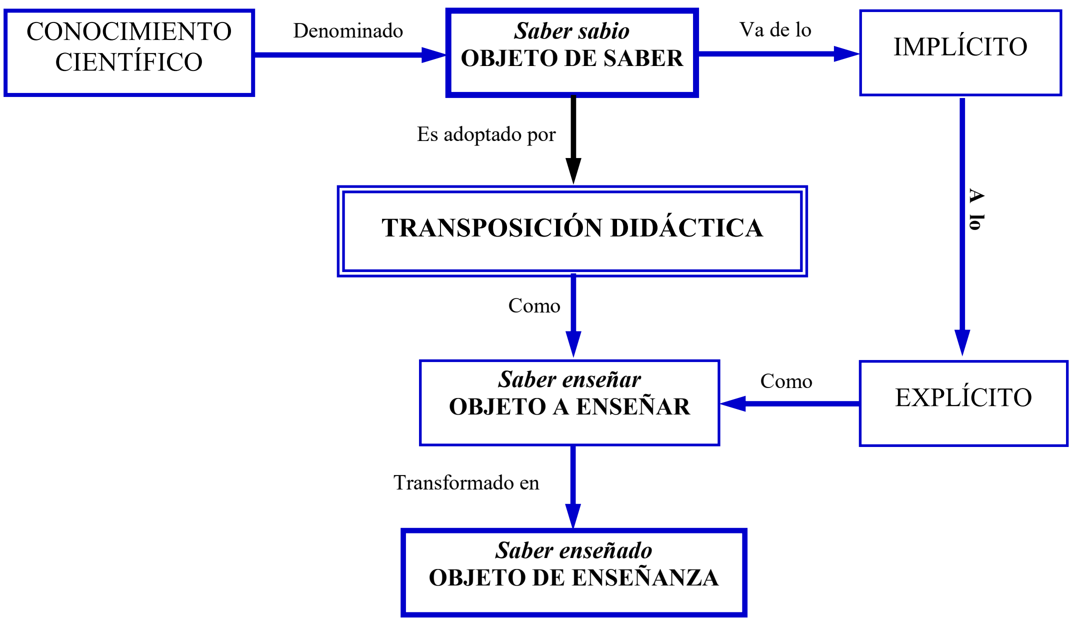
En el marco de la didáctica fundamental, y como una consecuencia natural del desarrollo de la teoría de la transposición didáctica, ha surgido el *enfoque antropológico en didáctica de las matemáticas* (Chevallard, 1992, citado por Gascón, 1998, p. 11). Para Gascón (1998), la TAD propugna que la actividad matemática debe ser interpretada (modelizada) como una *actividad humana* junto a las demás, en lugar de considerarla únicamente como la construcción de un *sistema de conceptos*, como la utilización de un *lenguaje* o como un *proceso cognitivo*. De esta manera, el enfoque antropológico integra muchos enfoques parciales (epistemológicos, lingüísticos, psicológicos, sociológicos, ...).

La Teoría Antropológica describe la actividad matemática y el saber que de ella emerge en términos de *organizaciones o praxeologías matemáticas*. Una organización matemática es una entidad (tipos de problemas o tareas problemáticas; tipos de técnicas) que permite resolver los tipos de problemas; *tecnologías* o discursos (“logos”) que describen y explican las técnicas; una *teoría* que fundamenta y organiza los discursos tecnológicos. Los tipos de problemas y los tipos de técnicas constituyen el “saber-hacer” matemático, mientras que los discursos tecnológicos y teóricos conformarían el “saber” matemático propiamente dicho (Bosch Casabó, 2000, p. 16).

Además, Bosch (2000, p. 17) sostiene que “la Teoría Antropológica asume, como uno de sus postulados fundamentales, que toda actividad en sentido estricto, todo “saber-hacer”, presupone la existencia de un “saber” o discurso justificativo-explicativo de la actividad. El término mismo de “praxeología”, formado a partir de “praxis”, actividad, y de “logos”, discurso, atestigua la inseparabilidad supuesta entre el “hacer” y el “explicar” dicho hacer”.

Figura 5

Proceso de la transposición didáctica, adaptado de Solarte E (2006).



En consecuencia, en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, no sólo debemos tener en cuenta las definiciones precisas de los objetos matemáticos, sino también los problemas, las representaciones, las propiedades involucradas y las justificaciones respectivas. Los conceptos matemáticos, interpretados desde la perspectiva antropológica, se convierten en un objeto dinámico que se construye progresivamente.

3.3. Teoría de ingeniería didáctica

La noción de ingeniería didáctica surgió en la didáctica de las matemáticas a comienzos de los años ochenta. Se denomina ingeniería didáctica a una forma de trabajo didáctico, equiparable con el trabajo del ingeniero quien, para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control científico. Cuya visión de la ingeniería didáctica fue abordar dos aspectos de la didáctica de las matemáticas de la época: las relaciones entre la investigación y la acción en el sistema de enseñanza; y el papel que conviene hacerle tomar a las "realizaciones didácticas" en clase, dentro de las metodologías de la investigación en didáctica (Artigue, 1995).

> …la ingeniería didáctica no es el desarrollo de un problema; sino, el término de ingeniería didáctica designa un conjunto de secuencias de clases diseñadas, organizadas y articuladas de manera coherente en un determinado tiempo por un maestro-ingeniero para efectuar un proyecto de aprendizaje de un contenido matemático dado para determinado grupo de estudiantes. A lo largo de los intercambios entre el profesor y los alumnos, el proyecto evoluciona bajo las reacciones de los alumnos en función de las decisiones y elecciones del profesor. Así, la ingeniería didáctica es, al mismo tiempo, un producto, resultante de un análisis *a priori*, y un proceso, resultante de una adaptación de la puesta en funcionamiento de un producto acorde con las condiciones dinámicas de una clase (Douady, 1994, p. 37).

En tal sentido, el término ingeniería didáctica se utiliza en didáctica de las matemáticas con una doble función: como metodología de investigación y como producciones de situaciones de enseñanza y aprendizaje. Además, para Artigue (2004, p. 8), en la teoría de situaciones (G. Brousseau, 1996), el objetivo fundamental no es el sujeto que aprende, sino la situación en la que el sujeto interactúa con otros y con la matemática.

Asimismo, para Artigue la teoría de situaciones didácticas ha permitido comprender mejor los mecanismos fundamentales del juego didáctico y construir ingenierías didácticas. La teoría de la transposición didáctica (iniciada por Yves Chevalard, 1985) contribuye a reforzar este enfoque sistémico de la didáctica francesa (Artigue, 2004, p. 8).

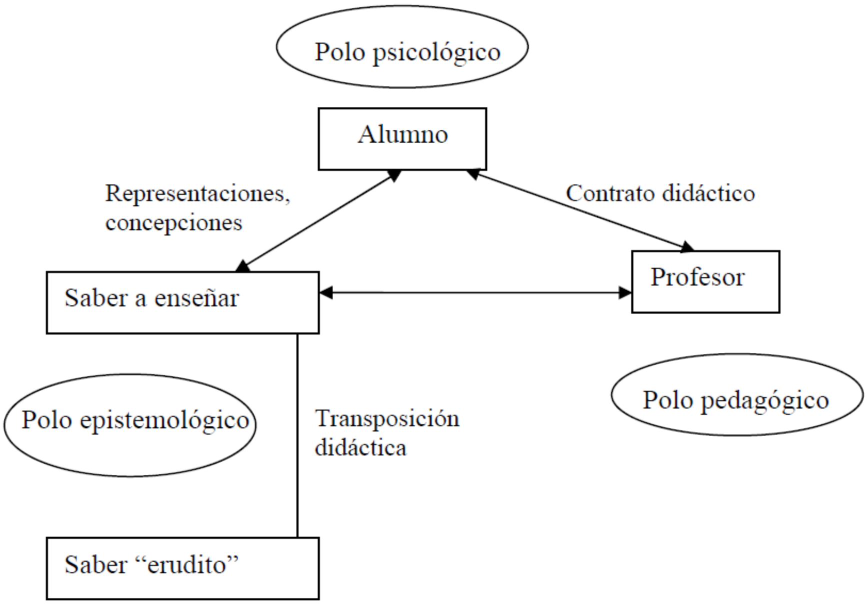
Considerando a la teoría de situaciones y la transposición didáctica como componentes de la ingeniería didáctica, De Faria Campos (2006, p. 2) ilustra a través del diagrama (ver Figura 2.6) el proceso de apropiación del saber por el sujeto. Artigue (1995, p. 40) distingue tres dimensiones ligadas a los procesos de construcción de ingenierías didácticas: dimensión epistemológica, dimensión cognitiva y dimensión didáctica.

Además, la ingeniería didáctica como metodología de investigación, se caracteriza en primer lugar por un esquema experimental basado en las "realizaciones didácticas" en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza. Allí se distinguen por lo general dos niveles: el *micro-ingeniería* y la *macro-ingeniería*, dependiendo de la importancia de la realización didáctica involucrada en la investigación. Nivel de micro-ingeniería, las investigaciones a este nivel son las que tienen por objeto el estudio de un determinado tema. Ellas son locales y toman en cuenta principalmente la complejidad de los fenómenos en el aula. Nivel de macro-ingeniería, son las que permiten componer la complejidad de las investigaciones de micro-ingeniería con las de los fenómenos asociados a la duración de las relaciones entre enseñanza y aprendizaje.

Por lo tanto, "la ingeniería didáctica es singular no por los objetivos de las investigaciones que entran en sus límites, sino por las características de su funcionamiento metodológico" (Artigue, 1995, p. 35).

Figura 6

Diagrama del proceso de la Ingeniería Didáctica.



Por otra parte, el proceso como producción de situaciones de enseñanza aprendizaje de la ingeniería didáctica considera tres fases: Análisis preliminar que considera las dimensiones cognitiva, didáctica y epistemológica del conocimiento a impartir; segunda fase: concepción y análisis a "priori" (descriptiva y predictiva) y diseño de una situación didáctica, se determinan qué variables didácticas son pertinentes y sobre cuáles se actuará, se establece las hipótesis de trabajo; la tercera fase: la experimentación es una "puesta de escena" de la situación didáctica, donde es un "proceso" en el cual el profesor implementa el producto y realiza los ajustes y adaptaciones necesarias según la dinámica de clase. La cuarta fase: análisis a posteriori y evaluación; que consiste en la revisión y validación de los resultados, a las observaciones que se tuvo en la resolución de problemas de los estudiantes.

En consecuencia, la ingeniería didáctica no sólo se apoya en resultados científicos de los experimentos realizados, sino que además realiza una toma de decisiones y el control sobre las componentes en el proceso.

Finalmente, M. Artigue (2004) sostiene que la ingeniería didáctica no implica sustituir un paradigma por otro, sino integrar diferentes aproximaciones teóricas en una construcción global y coherente, donde cada uno tiene su lugar, su función, y se organizan de manera eficaz las relaciones entre las diferentes centraciones posibles en las investigaciones didácticas y entre los diferentes niveles de análisis, del microdidáctico al macrodidáctico.

3.4. La socioepistemología

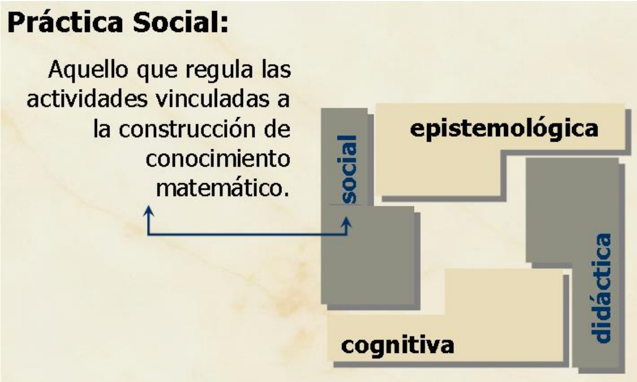
La socioepistemología estudia la construcción social del conocimiento; es un enfoque teórico de carácter sistémico que puede tratar los fenómenos de la producción y difusión de conocimiento desde una perspectiva múltiple.

Esta teoría forma parte de las Didáctica de la Matemática, que según Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez Sierra (2006, p. 85) y Cantoral y Farfán (2003), la aproximación socioepistemológica de la investigación matemática busca construir una explicación sistémica de los fenómenos didácticos en el campo de las matemáticas, […] interviene en el sistema didáctico en un sentido amplio, al tratar los fenómenos de producción, adquisición y de difusión del conocimiento matemático, así como en las investigaciones realizadas por Cantoral y que permite tratar en forma articulada los cuatro componentes fundamentales en la construcción del conocimiento, al estudio de la epistemología del conocimiento, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos asociados y los mecanismos de institucionalización (modos de transmisión) vía enseñanza. Esta aproximación múltiple ha sido denominada como el acercamiento socioepistemológico (Cantoral, 1998, 1999).

Tradicionalmente, los enfoques epistemológicos asumieron que el conocimiento es el resultado de la adaptación de las explicaciones teóricas de la evidencia empírica, ignorando en absoluto el papel de los escenarios de interés histórico, cultural e institucional en cada actividad humana. La socioepistemologia, propone el examen de conocimientos socialmente situada teniendo en cuenta que a la luz de las circunstancias y contextos sociales (Cantoral & Ferrari, 2004, pp. 67–68).

Figura 7

Proceso Dimensiones Construcción social del pensamiento matemático; tomada de la exposición V Foro – Mexicali. Ricardo Cantoral (Cinvestav del IPN / Clame AC).



La frase "práctica social" se refiere a la actividad del ser humano sobre el medio en el que se desenvuelve. A través de las prácticas sociales el hombre da sentido a los problemas fundamentales de la ciencia, sometiéndolos a las complejas relaciones entre ellos y su entorno (Camacho Ríos, 2006, p. 133).

Ricardo Cantoral et al. (2006, p. 85), considera a la práctica social como una "normativa" de la actividad, más que como actividad humana reflexiva o reflexión sobre la práctica o como sostiene Radford (2004, citado por Cantoral, 2006) quién considera como la "interiorización reflexiva de prácticas sociales históricamente constituidas".

Consideramos a la socioepistemología como sostiene Cantoral et al. (2006):

> "que la aproximación socioepistemológica a la investigación en matemática educativa busca construir una explicación sistemática de los fenómenos didácticos en el campo de las matemáticas, no sólo discute el asunto de la semiosis o el de la cognición de manera aislada, sino busca intervenir en el sistema didácticos en un sentido amplio, al tratar a los fenómenos de producción, adquisición y de difusión del conocimiento matemático desde una perspectiva múltiple, que incorpore al estudio de la epistemología del conocimiento, su dimensión socio cultural, los procesos cognitivos asociados y los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza" (2006, pp. 85–86).

Además, se ocupa del problema que plantea la construcción social del conocimiento matemático y su difusión institucional. Dado que este conocimiento adquiere el estatus de saber sólo hasta que se haya constituido socialmente, en ámbitos no escolares, su difusión hacia y desde el sistema de enseñanza le obliga a una serie de modificaciones que afectan también a las relaciones que se establecen entre los estudiantes y su profesor.

3.5. Enfoque ontosemiótico (EOS)

En los apartados anteriores hemos trabajado sobre las teorías de la Educación Matemática desarrolladas por los franceses Guy Brousseau, Yves Chevallard y Michèle Artigue y del mexicano Ricardo Cantoral. Grupos que han desplegado y vienen desplegando esfuerzos en una reflexión teórica sobre el objeto y los métodos de la investigación específicos en la Didáctica de la matemática. También, Godino presenta un marco teórico más amplio, a la que autores de la talla de Sierspinaka, Brousseau o D'Amore, consideran hoy en día al EOS como una de las más relevantes de las existentes en la Educación Matemática actual.

El EOS ha desarrollado diversas herramientas teóricas que se basan en varios antecedentes teóricos, que describen y analizan (Godino, 2003, p. 128). Y presenta las nociones teóricas articulando las dimensiones semióticas, institucionales y personales, epistemológica, psicológica y socio cultural en educación matemática, así como la ontología matemática en el estudio de la cognición matemática (Godino, 2002, 2003). En tal sentido, la EOS es un marco teórico que busca integrar y articular diversas aproximaciones y modelos teóricos usados en la investigación en Educación Matemática. Su objetivo principal es describir e investigar, de forma holística, los procesos de aprender y enseñar matemáticas

Godino considera un enfoque unificado del conocimiento, esto pasa por tres etapas (Godino, Batanero y Font, 2007). La primera etapa, se inicia en el periodo 1993 – 1998, (Godino & Batanero, 1994) con el desarrollo progresivo de las nociones de *significado institucional* y *personal* de un objeto matemático y su relación con la noción de comprensión. Desde supuestos pragmáticos, estas ideas tratan de centrar el interés de la investigación en los conocimientos matemáticos institucionalizados, pero sin perder de vista al sujeto, hacia quien se dirige el esfuerzo educativo (Godino et al., 2007a, p. 128).

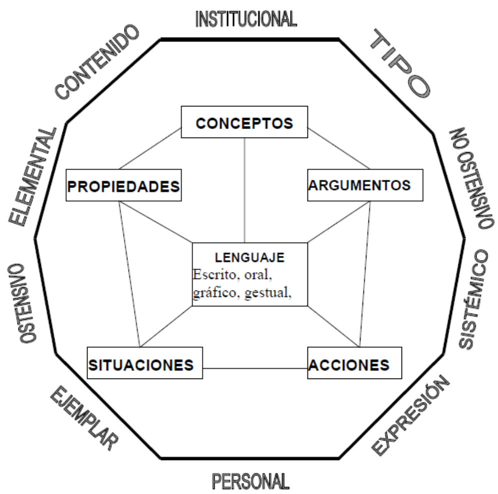
La segunda etapa, comienza a partir de 1998, elaborando más detalladamente los *modelos ontológicos* y *semióticos*; ya que los problemas epistémicos y cognitivas no pueden separarse de la reflexión ontológica; de una ontología que describa la actividad matemática y los procesos de comunicación de sus "productos". Además, avanzaron en el desarrollo de una ontología específica y semiótica para estudiar los procesos de interpretación de los sistemas de signos matemáticos utilizados en la interacción didáctica (Godino et al., 2007, p. 128).

En la tercera etapa, estuvieron interesados en los *modelos teóricos* para la *instrucción matemática* (Godino, Contreras, y Font, 2006). Luego definieron seis dimensiones en el proceso de instrucción matemática, cada uno de ellos modelizable como un proceso estocástico con sus respectivos espacios de estados y trayectorias: *epistémica* (relativo al conocimiento institucional), *educativo* (funciones del docentes), *estudiante* (funciones de los estudiantes), *mediacional* (uso de recursos instruccionales), *cognitivos* (génesis de significados personales) y *emocionales* (actitudes, emociones, etc. de los estudiantes ante el estudio de las matemáticas) (Godino et al., 2007a, p. 129). Además, sostienen que el modelo ontológico y semiótico de la cognición proporciona criterios para identificar los estados posibles de las trayectorias epistémica y cognitiva, y la adopción de la "negociación de significados" como noción clave para la gestión de las trayectorias.

El enfoque teórico inicia a partir de las nociones sobre significado personal e institucional de los objetos matemáticos (Godino & Batanero, 1994), y que, a partir de presupuestos de tipo pragmático, se enfatiza el papel del conocimiento institucional matemático, sin dejar de lado la importancia del sujeto como foco central de los esfuerzos educativos.

Figura 7

Componentes y facetas de la cognición matemática



En el trabajo mencionado se concibe el significado de un objeto matemático (número, función, etc.) en términos del sistema de práctica realizadas para resolver un cierto tipo de problemas; es decir, el objeto matemático designa a todo lo que es indicado, señalado o nombrado cuando se construye, comunica o aprende matemáticas (Godino, 2002). El *significado personal/significado institucional* de un objeto matemático se define como un sistema de prácticas, operativas y discursivas, realizadas por una persona o en el interior de una institución para resolver un campo de problemas (Godino & Batanero, 1994).

Esta teoría incluye una categorización de los objetos matemáticos. Los objetos matemáticos no son entidades abstractas y aisladas, sino que son constructos culturales que se configuran a través de prácticas sociales y discursivas; estos objetos matemáticos son entidades complejas que involucran aspectos ontológicos (naturaleza del objeto) y semióticos (representaciones y significados). Se propone como categorías primarias: situaciones, acciones, lenguaje, conceptos, propiedades y argumentación. El modelo ontológico propuesto se complementa y enriquece con la consideración de las cinco facetas o dimensiones duales (situaciones – problemas, acciones) como praxis y los tres componentes (concepto – definiciones, proposiciones y argumentaciones) que desempeñan un papel normativos en las matemáticas, que junto con la noción de función semiótica como entidad relacional entre los distintos tipos de entidades, permite escribir y relacionar una variedad de nociones cognitivas (D'Amore & Godino, 2007).

En la estructura ontosemiótico, la enseñanza implica la participación de los estudiantes en la comunidad a través de prácticas para compartir el sentido institucional, y el aprendizaje se concibe como la apropiación de los estudiantes de estos significados. Además, debemos indicar que el enfoque EOS, tiene el triple aspecto de la matemática: como resolución de problemas socialmente compartida, como lenguaje simbólico y sistema conceptual lógicamente organizado, así como la dimensión cognitiva individual. Asimismo, aporta herramientas teóricas para analizar el pensamiento matemático, los ostensivos que le acompañan, las situaciones y los factores que condicionan su desarrollo; propiciando un modelo unificado de la cognición e instrucción matemática (Godino, Batanero, & Font, 2007b).

En este contexto, la EOS propone el concepto de configuración didáctica para analizar las situaciones de enseñanza y aprendizaje, siendo este un sistema complejo que involucra a los estudiantes, el profesor, los contenidos matemáticos, los recursos didácticos y el contexto social y cultural.

3.6. De la teoría de la objetivación

Radford[2], concibe la teoría de la objetivación en la educación como un esfuerzo político, social, histórico y cultural cuyo fin es la creación de individuos éticos y reflexivos que se posicionan de manera crítica en prácticas sociales constituidas histórica y culturalmente (Radford, 2014, p. 34). La Teoría Cultural de la Objetivación se sustenta en tres conceptos claves: el *saber*, el *conocimiento* y el *aprendizaje*; cuya propuesta como una teoría general sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se inspira de escuelas antropológicas e histórico-culturales del conocimiento; además dicha teoría se apoya en una epistemología y una ontología no racionalista que dan lugar, por un lado, a una concepción antropológica del pensamiento y, por el otro, a una concepción esencialmente social del aprendizaje (Radford, 2006); además, ésta teoría está relacionado con conceptos muy complejos como la historia y cultura, en particular del conocimiento matemático (Moretti, Panossian, & de Moura, 2015).

La teoría de la objetivación tiene sustento en la base epistemológica que consiste en precisar la manera en que, según la teoría, esos objetos pueden (o no) llegar a ser conocidos y base ontológica que precisa el sentido en que la teoría aborda la cuestión de la naturaleza de los objetos conceptuales; asimismo, el concepto de pensamiento y su significado antropológico. Además el principal tema es el enseñanza - aprendizaje a la luz del concepto fundamental de sala de clase como comunidad de aprendizaje (Radford, 2006).

[2] Luis Radford es profesor de la Universidad Laurentiana, en Sudbury, Ontario, Canadá. Enseña en la École des sciences de l'éducation, es director del Laboratorio de Investigación en Semiótica y Pensamiento Matemático. Su investigación incluye el desarrollo del pensamiento algebraico, la relación entre cultura y pensamiento, epistemología de las matemáticas y semiótica. Trabaja en el desarrollo de una teoría cultural-histórica de enseñanza y aprendizaje: ***la teoría de la objetivación*** (Moretti, Panossian, & de Moura, 2015). Por sus investigaciones de trascendencia, la Universidad Laurentiana le otorgó el Premio a la excelencia investigativa 2004-2005; asimismo por sus investigaciones y aportes a a la matemática educativa internacionalmente, en 2011 ha recibido la Medalla Hans Freudenthal de la International Commission on Mathematical Instruction (ICMI).

A nivel epistemológico, la teoría de la objetivación propone un concepto dialéctico-materialista del saber; cuyo sustento se encuentra en la epistemología histórica, quién se ocupa de dilucidar la naturaleza de los objetos del conocimiento como entidades históricas culturales, particularmente con su naturaleza y conocimiento. La epistemología debe mostrar cómo la cognoscibilidad de los objetos matemáticos se encuentra dentro de los modos históricos de evolución cognoscitivos definidos (Radford, 2015, p. 129).

Para la teoría de la objetivación, el saber no es algo que se adquiere o que se transmite; es decir, el aprendizaje no consiste en construir o reconstruir un conocimiento. *Se trata de dotar de sentido a los objetos conceptuales que encuentra el alumno en su cultura*. La adquisición del saber es un proceso de elaboración activa de significados, denominado procesos de *objetivación* (Radford, 2006, p. 113).

Las bases filosóficas de la teoría se encuentran en el trabajo de Georg W. F. Hegel y su desarrollo posterior en la filosofía de K. Marx y la tradición dialéctica (que incluye a Vygotsky y a Leont'ev). El saber, sostengo, es movimiento. De manera más específica, el saber está constituido de formas siempre en movimiento de reflexión y acción histórica y culturalmente codificadas (Radford, 2013).

Radford (2008) formula varios principios clave que definen su teoría:

a) **Aprendizaje como proceso social y cultural**: A diferencia de las teorías constructivistas que enfatizan la construcción interna del conocimiento, la teoría de la objetivación considera que el aprendizaje es esencialmente un fenómeno social que ocurre a través de interacciones con otras personas. Esto implica que los estudiantes no simplemente "descubren" el conocimiento, sino que lo objetivan mediante prácticas sociales y culturales específicas (Radford, 2013).
b) **El lenguaje y los gestos:** La comunicación a través del lenguaje y los gestos es muy importante, ya que éstas son herramientas fundamentales en la mediación del aprendizaje. Según Radford (2009), los significados matemáticos se objetivan a través de una combinación de palabras, acciones y expresiones corporales; esto implica que la comprensión matemática está íntimamente ligada al contexto comunicativo y corporal.
c) **Temporalidad y historicidad del aprendizaje**: El aprendizaje de contenidos matemáticos no es un evento aislado, sino un proceso histórico que se desarrolla a lo largo del tiempo. Esto implica, que los conceptos matemáticos se deben entender no solo en términos de su adquisición individual, sino también en relación con su evolución cultural y su transmisión generacional (Radford, 2006).

La aplicación de la Teoría de la Objetivación en la enseñanza de las matemáticas, ha demostrado ser efectiva para crear entornos de aprendizaje más inclusivos y colaborativos. Un estudio de Radford et al. (2011) mostró que los estudiantes que participaron en actividades diseñadas bajo este enfoque desarrollaron una comprensión más profunda de los conceptos matemáticos al ser guiados por prácticas discursivas compartidas en el aula.

Por ejemplo, en una clase de álgebra, Radford (2010) observó que cuando los estudiantes trabajaban en tareas colaborativas, sus interacciones permitían la co-construcción de significados algebraicos que trascendían las interpretaciones individuales. A través de la discusión y el uso de gestos, los estudiantes no solo resolvían problemas, sino que también desarrollaban una comprensión más rica de los conceptos subyacentes, como las relaciones entre variables y coeficientes.

La aplicación de la teoría de la objetivación en la enseñanza de las matemáticas ha demostrado ser efectiva para crear entornos de aprendizaje más inclusivos y colaborativos. Un estudio de Radford et al. (2011) mostró que los estudiantes que participaron en actividades diseñadas bajo este enfoque desarrollaron una comprensión más profunda de los conceptos matemáticos al ser guiados por prácticas discursivas compartidas en el aula.

Por ejemplo, en una clase de álgebra, Radford (2010) observó que cuando los estudiantes trabajaban en tareas colaborativas, sus interacciones permitían la co-construcción de significados algebraicos que trascendían las interpretaciones individuales. A través de la discusión y el uso de gestos, los estudiantes no solo resolvían problemas, sino que también desarrollaban una comprensión más rica de los conceptos subyacentes, como las relaciones entre variables y coeficientes.

La teoría de la objetivación enfatiza el diseño de actividades que fomenten la interacción social y la mediación cultural. Esto incluye el uso de **tareas abiertas** que requieren la colaboración entre estudiantes y la **discusión colectiva** como medio para desarrollar el pensamiento matemático. Un ejemplo de esto es el uso de **juegos matemáticos** donde los estudiantes deben trabajar juntos para resolver problemas. En un estudio llevado a cabo por Radford y Sabena (2015), se descubrió que los estudiantes de secundaria, al participar en juegos algebraicos, no solo aprendían los conceptos necesarios para resolver las tareas, sino que también desarrollaban habilidades comunicativas y de razonamiento colectivo.

Además, la teoría de la objetivación aboga por el uso de **mediadores semióticos** como diagramas, gráficos y objetos manipulables para facilitar el proceso de objetivación del conocimiento. Según Radford (2012), estos mediadores permiten a los estudiantes materializar sus ideas y pensamientos, ayudándoles a construir significados.

Finalmente, la Teoría de la Objetivación de Luis Radford ofrece un marco teórico robusto para repensar cómo se enseña y se aprende matemáticas, destacando la importancia de las prácticas sociales y culturales en la construcción del conocimiento. Este enfoque permite un aprendizaje más profundo y significativo, al situar los conceptos matemáticos en contextos de interacción social y colaboración.

Al adoptar estrategias pedagógicas basadas en esta teoría, los educadores pueden crear entornos de aprendizaje que no solo mejoran la comprensión conceptual, sino que también promueven habilidades esenciales para el desarrollo personal y social de los estudiantes. Como sugiere Radford (2013), el objetivo no es simplemente transmitir conocimientos matemáticos, sino cultivar un espacio donde los estudiantes puedan objetivar esos conocimientos a través de la participación activa en prácticas matemáticas significativas.

3.7. El Constructivismo Radical en el Contexto de la Matemática Educativa

El Constructivismo Radical, una teoría de Ernst von Glasersfeld, ha tenido un impacto profundo en la enseñanza de las matemáticas al cambiar la perspectiva sobre la formación del conocimiento matemático. Según esta teoría, el conocimiento no es una reproducción fiel de una realidad objetiva, sino una construcción activa que realiza cada individuo con base en sus experiencias y sus interacciones con el entorno. Además, el constructivismo radical considera que todo conocimiento es una construcción interna que no necesariamente representa una realidad objetiva, sino más bien un modelo útil basado en la experiencia personal de cada persona

Además, Von Glasersfeld (1989) define varios principios del constructivismo radical que son aplicables a la enseñanza de las matemáticas:

a) **Conocimiento como Construcción Activa**: El conocimiento no es algo que se transmite de una persona a otra, sino que el estudiante lo construye activamente en un proceso continuo y dinámico. En la clase de matemáticas, esto implica que los estudiantes deben participar en actividades que fomenten el pensamiento crítico y la resolución de problemas a través de sus experiencias y interacciones sociales, en vez de simplemente memorizar fórmulas y procedimientos.

b) **Viabilidad con criterio**: En lugar de perseguir la verdad absoluta, el constructivismo radical se centra en la viabilidad de los conceptos en el contexto de la experiencia individual. Es decir, el conocimiento es viable si resulta útil para la persona en su interacción con el entorno. En la educación matemática, esto significa que se busca que los estudiantes comprendan los conceptos desde su propia perspectiva, creando significados que sean útiles y funcionales para ellos (Steffe & Kieren, 1994).

c) **Énfasis en la autonomía del estudiante**: Se fomenta la autonomía intelectual al motivar a los estudiantes a ser responsables de su propio aprendizaje. En matemáticas, esto implica crear entornos de aprendizaje donde los estudiantes exploren, formulen conjeturas, prueben sus hipótesis y desarrollen estrategias de resolución por sí mismos.

d) **Papel del lenguaje**: El lenguaje es una herramienta clave en la construcción del conocimiento, pero también puede limitar nuestra comprensión de ciertos conceptos. Las palabras no son simplemente etiquetas para objetos externos, sino construcciones mentales que utilizamos para comunicar nuestras experiencias.

La aplicación del constructivismo radical en la enseñanza de las matemáticas ha demostrado ser efectiva en varios estudios. Por ejemplo, Simon (1995) destaca que cuando los estudiantes construyen activamente significados matemáticos y comprenden mejor los conceptos; también, desarrollan una mayor habilidad para transferir esos conceptos a nuevos contextos.

Una de las estrategias pedagógicas derivadas de esta teoría es el uso de situaciones-problema que fomentan el aprendizaje activo. En un estudio realizado por Cobb et al. (1991), se observó que los estudiantes que participaron en entornos de aprendizaje constructivista mostraron una comprensión más profunda y duradera de los conceptos matemáticos en comparación con aquellos que recibieron una enseñanza tradicional.

a) El papel del profesor: El docente deja de ser un transmisor de conocimientos y pasa a ser un facilitador del aprendizaje. Su función es crear un ambiente de aprendizaje donde los estudiantes puedan explorar, experimentar y construir sus propios significados. Esto implica, que el profesor debe diseñar actividades que desafíen las ideas preconcebidas de los estudiantes y fomenten la reflexión metacognitiva (von Glasersfeld, 1995).
b) Aprendizaje activo: Se promueven actividades que involucran a los estudiantes en la resolución de problemas, la exploración de patrones y la formulación de conjeturas.
c) Énfasis en los procesos: Se presta más atención a los procesos de pensamiento que a los resultados finales. El objetivo es que los estudiantes comprendan cómo se construyen los conceptos matemáticos y no solo que sean capaces de aplicar algoritmos.
d) Importancia de las representaciones múltiples: Se utilizan diversas representaciones (gráficas, algebraicas, geométricas) para ayudar a los estudiantes a construir una comprensión más profunda de los conceptos matemáticos.

Además, en esta teoría se valora los errores como oportunidades de aprendizaje; además, en lugar de corregir inmediatamente los errores, los profesores deben animar a los estudiantes a reflexionar el por qué sus enfoques no funcionaron y cómo podrían modificarlos para resolver problemas matemáticos de manera más efectiva (Confrey,1990).

Por otro lado, esta teoría permite a que los estudiantes desarrollen ciertas habilidades metacognitivas, tales como:

a) Desarrollo del pensamiento crítico: Los estudiantes se convierten en pensadores independientes que pueden abordar problemas complejos sin depender de procedimientos memorizados.
b) Comprensión Profunda: En lugar de aprender superficialmente las matemáticas, los estudiantes construyen una comprensión más profunda y conceptual de los temas (Steffe, 1991).
c) Motivación Intrínseca: Al ser activos en su propio proceso de aprendizaje, los estudiantes a menudo desarrollan un mayor interés y motivación por la materia.

Además, su implementación es un desafío en este enfoque constructivista radical por las siguientes razones:

a) El rol del profesor: Los profesores deben estar dispuestos a permitir que los estudiantes tomen la iniciativa y a renunciar al control total de la clase. Esto requiere una formación profesional muy especializada para desarrollar estrategias de enseñanza constructivistas (Ball, 1990).
b) Resistencia de los estudiantes: Los estudiantes deben estar dispuestos a romper las estructuras de la enseñanza tradicional y desarrollar el proceso de construcción de su propio conocimiento.

c) Evaluación compleja: Evaluar el aprendizaje en un entorno constructivista radical es muy desafiante, ya que se centra en la comprensión y el pensamiento crítico en lugar de la memorización de procedimientos (Cobb, 1994).

El constructivismo radical de von Glasersfeld introduce una nueva manera de enfocar la enseñanza de las matemáticas, enfatizando que el aprendizaje es un proceso activo, personal y continuo. Estudios en el campo de la educación matemática muestran que los entornos de aprendizaje que aplican estos principios no solo mejoran la comprensión conceptual de los estudiantes, sino que también desarrollan habilidades transferibles esenciales para el pensamiento crítico y la resolución de problemas.

A pesar de los desafíos que presenta su implementación, los beneficios potenciales hacen que el constructivismo radical sea un enfoque valioso para la enseñanza de las matemáticas en el siglo XXI. Como menciona Simon (1995), "la clave no es enseñar a los estudiantes qué pensar, sino cómo pensar". Por lo tanto, el objetivo de la educación matemática desde esta perspectiva es formar estudiantes autónomos y críticos, capaces de enfrentar y resolver problemas en contextos variables.

REFERENCIAS

Ackermann, E. (2004). Constructing Knowledge and Transforming the World. En L. Steels & M. Tokoro (Eds.), *A Learning zone of one´s own: sharing representations and flow collaborative learning environments* (pp. 15–37). Amsterdam, Berlin, Oxford, Tokyo, Washington, DC: IOS Press. Recuperado a partir de http://web.media.mit.edu/~edith/publications/2004-Constructing_Knowledge.pdf

Aramburu Oyarbide, M. (2004). Jerome Seymour Bruner: de la percepción al lenguaje. *Revista Iberoamericana de Educación*, *33*(7), 1–19.

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 33–60). Bogotá: Una empresa docente & Grupo Editorial Iberoamericana S.A. Recuperado a partir de http://funes.uniandes.edu.co/676/1/Artigueetal195.pdf

Artigue, M. (2004). Problemas y desafíos en educación matemática: ¿qué nos ofrece hoy la didáctica de la matemática para afrontarlos? *Educación Matemática "Santillana"*, *16*(003), 5–28.

Asiala, M., Brown, A., Devries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. *CBMS. Issues in Mathematics Education: Research in Collegiate Mathematics Education*, *6*, 1–32.

Ayers, T., Davis, G., Dubinsky, E., & Lewin, P. (1988). Computer Experiences in Learning Composition of Functions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *19*(3), 246–259. https://doi.org/10.2307/749068

Badilla, E., & Chacón, A. (2004). Construccionismo: Objetos con el cual pensar, entidades públicas y micromundos. *Revista Actualidades Investigativas en Educación*, *4*(1), 1–12.

Ball, D. L. (1990). The mathematical understandings that prospective teachers bring to teacher education. *The Elementary School Journal*, *90*(4), 449-466

Baquero, R. (2001). *Vigotsky y el aprendizaje escolar*. Aique Editor S. A.

Barbosa, K. (2003). La enseñanza de inecuaciones desde el punto de vista de la teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *6*(003), 199–219.

Bennahum, D. (1996). ¿Las Escuelas están Out? Recuperado el 3 de febrero de 2011, a partir de http://neoparaiso.com/logo/escuelas-out.html

Berland, M. (2009). Constructionist Collaborative Engineering: PVBOT. University of Texas at San Antonio. Recuperado a partir de http://berland.org/files/berland-aera06.pdf

Bliss, J. (1999). Learning with and by Machines. En J. Bliss, R. Säljö, & P. Light (Eds.), *Learning Sites: Social and Technological Resources for Learning* (pp. 165–171). Pergamon.

Booth, C. (2006). Alan Kay and the Graphical User Interface [Essay]. Recuperado, a partir de http://www.lottiebooth.com/pdf/essay.pdf

Bosch Casabó, M. (2000). Un punto de vista antropológico: la evolución de los "instrumentos de presentación" en la actividad matemática. En L. C. Contreras, J. Carrillo, N. Climent, & M. Sierra (Eds.), *Actas de IV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 15–28). Huelva, España: Universidad de Huelva. Recuperado a partir de http://www.seiem.es/publicaciones/archivospublicaciones/actas/Actas04SEIEM/IVsimposio.pdf

Bouras, C., Poulopoulos, V., & Tsogkas, V. (2010). Squeak Etoys: Interactive and Collaborative Learning Environments. En Management Association, USA, I (Ed.), *Gaming and Simulations: Concept, Methodologies, Tools and Applications* (Vol. 3, pp. 898–909). IGI Global. Recuperado a partir de http://www.igi-global.com/chapter/gaming-simulations-concepts-methodologies-tools/49425

Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J., & Nichols, D. (1992). Development of the process conception of function. *Educational Studies in Mathematics*, *23*(3), 247–285. https://doi.org/10.1007/BF02309532

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics: Didactique des mathématiques, 1970-1990*. (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, & V. Warfield, Eds.) (Softcover reprint of hardcover 1st ed. 1997). Kluwer Academic Publishers.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Libros del Zorzal.

Bull, G. (2005). Children, Computers, and Powerful Ideas. *Comtemporary Issues in Technologyand Teacher Education*, *5*(3/4), 349–352.

Cajaraville Pegito, J. A. (1989). *Ordenador y educación matemática: algunas modalidades de uso*. Síntesis.

Camacho Ríos, A. (2006). Socioepistemología y prácticas sociales. *Educación Matemática*, *18*(001), 133–160.

Cantoral, R. (1998). approccio socioepistemologico alla ricerca in matematica educativa: un programma emergente. En B. D'Amore (Ed.), *Diversi Aspetti e Diversi Ámbiti della Didattica della matematica* (pp. 15–24). Bologna: Pitagora Editrice. Recuperado a partir de http://biblioteca.cinvestav.mx/indicadores/texto_completo/cinvestav/1998/77942_21.pdf

Cantoral, R. (1999). Approccio socioepistemologico alla ricerca in Matematica Educativa: Un programma emergente. En B. D'Amore (Ed.), *La matematica e la sua didattica* (Vol. 3, pp. 258–270). Bologna: Pitagora Editrice. Recuperado a partir de http://cimate.uagro.mx/cantoral/Publicaciones/pub.htm

Cantoral, R., & Farfán, R. M. (2003). Mathematics education a vision of its evolution. *Educational Studies in Mathematics*, *53*(3), 255–270.

Cantoral, R., Farfán, R. M., Lezama, J., & Martínez Sierra, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *Número Especial*, 83–102.

Cantoral, R., & Ferrari, M. (2004). Uno studio socioepistemologico sulla predizione. *La matematica e la sua didattica. Pitagora Editrice Bologne*, (2), 33–70.

Chavarría, J. (2006). Teoría de las situaciones didácticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *1*(2), 1–10.

Chevallard, Y. (2000). *La Transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado* (3ª ed). Aique.

Clark, J. M., Cordero, F., Cottrill, J., Czarnocha, B., DeVries, D. J., St. John, D., … Vidakovic, D. (1997). Constructing a schema: The case of the chain rule. *Journal of Mathematical Behavior*, *16*(4), 345–364. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(97)90012-2

Codes, M., & Sierra, M. (2005). *Entorno computacional y educación matemática: Una revisión del estado actual* (Informe de Investigación. SEIEM). Córdoba: Grupo de investigación:Didáctica del

Análisis. Recuperado a partir de http://www.seiem.es/publicaciones/archivospublicaciones/comunicacionesgrupos/cd/grupos/grupoanalisis/codessierra.pdf

Cobb, P., Yackel, E., & Wood, T. (1991). Curriculum and teacher development: Psychological and anthropological perspectives. In *Research in mathematics education*.

Cobb, P. (1994). Where Is the Mind? Constructivist and Sociocultural Perspectives on Mathematical Development. *American Educational Research Association, 23* (7), 13–20.

Confrey, J. (1990). What constructivism implies for teaching. *Journal for Research in Mathematics Education*, *21*(4), 392-396.

Da Silva, P. R. D. S. (2008). Instrumentação para o ensino de ciências. *Revista Brasileira em Promo*, 19–28. https://doi.org/10.5020/18061230.2008.p19

D'Amore, B. (2008). Epistemología, didáctica de la matemática y prácticas de enseñanza. *Enseñanza de la matemática. Revista de la ASOVEMAT (Asociación Venezolana de Educación Matemática)*, *17*(1), 87–106.

D'Amore, B., & Godino, J. (2007). El enfoque ontosemiotico como el desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *10*(2), 191–218.

Dantel, J. (2003). Las nuevas tecnologías: ¿Espejismo o milagro? *Educación Hoy, UNESCO*, (7), 4–8.

De Faria Campos, E. (2006). Ingeniería didáctica. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *1*(2), 1–9.

Douady, R. (1994). Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir: une chronique en calcul mental, un projet en algèbre à l'articulation collège-seconde. *Topiques Éditions. IREM*, (15), 37–61.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95–123). Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, E. (2000a). De la investigación en la matemática teórica a la investigación en la matemática educativa: Un viaje personal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *3*(1), 47–70.

Dubinsky, E. (2000b). Writing Programs to Learn Mathematics. Recuperado a partir de http://www.math.kent.edu/~edd/ICMITechPpr.pdf

Dubinsky, E., Dautermann, J., Leron, U., & Zazkis, R. (1994). On Learning Fundamental Concepts of Group Theory. *Educational Studies in Mathematics*, *27*, 267–305.

Dubinsky, E., & Lewin, P. (1986). Reflective Abstraction and Mathematics Education: The Genetic Decomposition of Induction and Compactness. *The Journal of Mathematical Behavior*, (5), 55–92.

EACEA/Eurydice. (2011). *Mathematics Education in Europe: Common Challenges and National Policies*. Brucelas: EACEA/Eurydice. Recuperado a partir de http://eacea.ec.europa.eu/education/eurydice/documents/thematic_reports/132EN.pdf

Esteban, M. (2009). Las ideas de Bruner: "de la revolución cognitiva" a la "revolución cultural". *EDUCERE . Ideas y personajes*, *13*(44), 235–241.

Falbel, A. (1993). Construccionismo. Enlaces 2001. Abriendo las Fronteras del Aula. Recuperado a partir de http://llk.media.mit.edu/projects/panama/lecturas/Falbel-Const.pdf

Font Moll, F. (2005). Una aproximación ontosemiótica a la didáctica de la derivada. En *Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM* (pp. 111–128). Córdoba: SEIEM. Recuperado a partir de http://funes.uniandes.edu.co/1303/1/Font2005Una_SEIEM_111.pdf

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en didactique des mathématiques*, *18/1*(52), 7–33.

Godino, J., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *0*(3), 325–355.

Godino, J. D. (1991). Hacia teoria didactica matematica. En A. Gutierrez (Ed.), *Area de conocimiento: Didáctica de la Matemática* (pp. 105–148). Editorial Síntesis S.A. Recuperado a partir de http://www.profepavez.cl/4didactica/masdidactica/1_Hacia_teoria_didactica_matematica_Godino.pdf

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *22*(2/3), 237–284.

Godino, J. D. (2003). Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2003). Fundamentos de la enseñanza y aprendizaje de la Matemática para maestros. Universidad de Granada. Proyecto Edumat-Maestros. Recuperado a partir de http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007a). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *The International Journal on Mathematics Education*, *39*(1–2), 127–135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007b). Un enfoque ontosimiótico del conocimiento y la instruccion matemática. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *39*(1–2), 127–135.

Harel, I. (1991). *Children designers: interdisciplinary constructions for learning and knowing mathematics in a computer-rich school*. The Media Laboratory Massachusetts of Technology. Ablex Publishing.

Inhelder, B., García, R., & Vonèche, J. (1978). *Epistemología genética y equilibración: Homenaje a Jean Piaget*. Editorial Huemul S.A.

Jachewatzky-Hashaviah, G. A. (2011, 09). Construccionismo. Recuperado a partir de https://snt123.mail.live.com/default.aspx?rru=inbox&wlexpid=5316D87BB0294FBC9B90CED779CD14C9&wlrefapp=2#n=1433409431&rru=inbox&qvid=7&pdir=NextPage&paid=68f5445e-26dd-11e1-bc98-00237de41794&pad=2011-12-15T05%3A27%3A09.963Z&pidx=2&mid=5268b94e-e7d7-11e0-bd1d-00237de3fe36&fv=1

Kafai, Y. B., & Resnick, M. (1996). *Constructionism in Practice: Designing, Thinking, and Learning in A Digital World*. Lawrence Erlbaum Asociates, Publishers.

Kayton, B., Vosloo, S., & Sparks, B. (2008). Kusasa: Developing Analytical Thinking Skills through Peertaught Software Programming. En D. Remenyi (Ed.), *Proceedings of the 3rd International Conference on e-Learning*. Cape Town, South Africa: Academic Conferences Limited.

Levis, D. (2007). Aprender y enseñar hoy: el desafío informático. *Revista Novedades Educativas*, (203), 1–13.

Martin, L., & Pirie, S. (2003). Making images and noticing properties: the role of the computer in mathematical generalisation. *Mathematics Education Research Journal*, *15*(2), 171–186.

Maulida, L., Nurossobah, P., Aura, B. A., Nengsih, E. D., & Rasilah, R. (2024). Improving The Effectiveness of Mathematics Learning Through Artificial Intelligence: Literature Review. *Journal of General Education and Humanities*, *3*(4), Article 4. https://doi.org/10.58421/gehu.v3i4.267

Meel, D. E. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la Teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *6*(003), 221–278.

Mohamed, M. Z. bin, Hidayat, R., Suhaizi, N. N. binti, Sabri, N. binti M., Mahmud, M. K. H. bin, & Baharuddin, S. N. binti. (2022). Artificial intelligence in mathematics education: A systematic literature review. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *17*(3), 1-11. https://doi.org/10.29333/iejme/12132

Moretti, V. D., Panossian, M. L., & de Moura, M. O. (2015). Educação, educação matemática e teoria cultural da objetivação: uma conversa com Luis Radford. *Educação e Pesquisa*, *41*(1), 243–260. https://doi.org/10.1590/S1517-97022015410100201

Murray-Lasso, M. . (2005). Sobre el uso de Logo en inteligencia artificial. *Ingeniería, Investigación y Tecnología*, *6*(3), 177–186.

NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics. Recuperado a partir de http://www.nctm.org/standards/content.aspx?id=16909

Orhani, S. (2021). Artificial Intelligence in Teaching and Learning Mathematics. *Kosovo Educational Research Journal*, *2*(3), 29-38.

Papert, S. (1980a). Computer-based microworlds as incubators for powerful ideas. En R. Taylor (Ed.), *The computer in the school: Tutor, tool, tutee* (pp. 203–210). Teacher's College Press.

Papert, S. (1980b). Constructionism vs. Instructionism [Speech]. *Conference of educators in Japan*. Japan. Recuperado a partir de http://www.papert.org/articles/const_inst/const_inst3.html

Papert, S. (1982). *Desafío a la mente: computadoras y educación*. (L. Espinoza de Matheu, Trad.) (2da ed.). Editorial Galápagos.

Papert, S. (1986). *Constructionism: A new opportunity for elementary science education*. Massachusetts: Massachusetts Institute of Technology, Media Laboratory, Epistemology and Learning Group.

Papert, S. (1995). *La Máquina de los niños: replantearse la educación en laera de los ordenadores*. Editorial Paidós.

Papert, S., & Harel, I. (1991). Situating Constructionism. En I. Harel (Ed.), *Construccionism* (pp. 1–11). Massachusetts Institute of Technology. Epistemology & Learning Research Group: Ablex Publishing Corporation. Recuperado a partir de http://www.papert.org/articles/SituatingConstructionism.html

Perkins, D. (1999). ¿Qué es la comprensión? En M. Stone Wiske (Ed.), *La Enseñanza para la comprensión: vinculación entre la investigación y la práctica* (pp. 69–93). Editorial Paidós.

Piaget, J. (1976). *La construcción de lo real en el niño*. Ediciones Nueva Visión.

Piaget, J. (1985). *Psicología y epistemología*. Editorial Planeta de Agostini.

Piaget, J. (1990). *La equilibración de las estructuras cognitivas: Problema central del desarrollo*. Siglo XXI, Editores S.A.

Piaget, J., & Beth, E. W. (1980). *Epistemologia matemática y psicológica* (2da ed.). Editorial Critica, S.A.

Piaget, J., & García, R. (1982). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. Siglo Veintiuno.

Pirie, S., & Kieren, T. (1989). A recursive theory of mathematical understanding. *For the Learning of Mathematics*, *9*(3), 7–11.

Pirie, S., & Kieren, T. (1992). Creating Constructivist Environments and Constructing Creative Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *23*(5), 505–528.

Pirie, S., & Kieren, T. (1994). Growth in Mathematical Understanding: How Can We Characterise It and How Can We Represent It? *Educational Studies in Mathematics*, *26*(2), 165–190.

Pirie, S., & Martin, L. (2000). The role of collecting in the growth of mathematical understanding. *Mathematics Education Research Journal*, *12*(2), 127–146.

Piscitelli, A. (2011, marzo 14). El mundo educativo necesita adaptarse a la realidad virtual de los alumnos Recuperado a partir de https://www.fundaciontelefonica.com/noticias/17_01_2014_esp_6370-2187/

Pólya, G. (1981). *Mathematical discovery: on understanding, learning and teaching problem solving*. John Wiley.

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Relime*, (Número Especial), 103–129.

Radford, L. (2006). Elements of a cultural theory of objectification. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *9*(1), 103-129.

Radford, L. (2008). The ethics of being and knowing: Towards a cultural theory of learning. *Educational Studies in Mathematics*, *68*(2), 101-126.

Radford, L. (2009). Why do gestures matter? Sensuous cognition and the enactivist conception of mind. *Educational Studies in Mathematics*, *70*(2), 111-126.

Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *ZDM Mathematics Education*, *42*(1), 143-155.

Radford, L., Demers, S., Guzmán, J., & Cerulli, M. (2011). The sensual and the conceptual: Artefact-mediated kinesthetic actions and semiotic activity. *Educational Studies in Mathematics*, *77*(2), 127-152.

Radford, L. (2012). On the role of representations and artifacts in knowing and learning. *Educational Studies in Mathematics*, *80*(1-2), 125-147.

Radford, L. (2013). Three Key Concepts of the Theory of Objectification: Knowledge, Knowing, and Learning. *Journal of Research in Mathematics Education*, *2*(1), 7–44. https://doi.org/10.4471/redimat.2013.19

Radford, L. (2014). La teoría de la objetivación. *Ruta Maestra*, *9*, 33–37.

Radford, L. (2015). The Epistemological Foundations of the Theory of Objectification. *Teaching and Learning Mathematics. Some Past and Current Approaches to Mathematics Education*, 127–149.

Radford, L., & Sabena, C. (2015). The question of methods in a cultural theory of learning. *Mathematics Education Research Journal*, *27*(4), 527-545

Resnick, M. (2001). Closing the Fluency Gap. *MIT, Comunication of the ACM*, *44*(3), 144–145.

Rieber, W. C. (2004). Microworlds. En D. H. Jonassen (Ed.), *Handbook of Research for Educational Communications and Technology* (2a ed., pp. 583–603). Lawrence Erlbaum Associates. Recuperado a partir de http://www.aect.org/edtech/39.pdf

Rodriguez, I. (2011). Del saber a enseñar al saber enseñado: una interpretación de la Transposicón Didáctia en la Matemática. *Cuadernos de Educación y Desarrollo*, *3*(26).

Salinas Muñoz, M. E. (2010). Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas. *Revista Q, Universidad Pontifica Bolivariana*, *5*(9), 1–7.

Sammet, J. E. (1972). Programming languages: History and future. *Association for Computing Machinery, Inc*, *15*(7), 601–610.

Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 1–36.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(2), 114-145.

Steffe, L. P., & Kieren, T. (1994). Radical constructivism and mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(6), 711-733.

Smith, L. (1994). B. F. SKINNER (1904 - 1990). *UNESCO International Bureau of Education*, *24*(2/4), 519–532.

Socas Robayna, M. (2000). Jean Piaget y su influencia en la educación. *Números Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *43–44*(74), 369–372.

Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales", & National Council of Teachers of Mathematics (Estados Unidos). (2003). *Principios y estándares para la educación matemática* (1ª ed. en castellano). Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Solarte E, M. C. (2006). Los conceptos científicos presentados en los textos escolares: son consecuencia de la transposición didáctica. *Revista ieRed*, *1*(4), 1–12.

Törner, G., & Sriraman, B. (2005). Issues and tendencies in german mathematics-didáctics: An epochal perspective. En H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 197–202). Melbourne, Australia: PME. Recuperado a partir de http://www.emis.de/proceedings/PME29/PME29ResearchForums/PME29RFEnglishSriraman.pdf

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación matemática*, *17*(1), 5–32.

Turkle, S., & Papert, S. (1990). Epistemological Pluralism: Styles and Voices within the Computer Culture. *Signs: Journal of Women in Culture and Society*, *16*(1), 128–157.

UNESCO. (2023a). *ChatGPT e inteligencia artificial en la educación superior: Guía de inicio rápido*. Instituto Internacional de la UNESCO para la Educación Superior en América Latina y el Caribe. https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000385146_spa

UNESCO. (2023b). Consenso de Beijing sobre la inteligencia artificial y la educación. *Perfiles educativos*, *45*(180), 176-182. https://doi.org/10.22201/iisue.24486167e.2023.180.61303

Vaca González, F. J., Cisneros López, H. L., Estrada Camargo, D., García Tamayo, M. F., Palacios Rodríguez, R., Raya Rosas, L. A., Rivera Durán, C., & Rodríguez Silva, A. F. (2021). Uso de plataformas virtuales en el aprendizaje de las Matemáticas. *Jóvenes en la ciencia*, *10*. https://www.jovenesenlaciencia.ugto.mx/index.php/jovenesenlaciencia/article/view/3456

Vicario, M. (2009). El aporte papertiano a la teoría informática educativa. En *XXV Simposio Internacional de Computación en la Educación* (pp. 1–12). SOMECE.

Vigotsky, L. S. (1979). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Grupo Editorial Grijalbo.

Vinagre, M. (2010). *Teoría y práctica del aprendizaje colaborativo asistido por ordenador*. Editorial Síntesis S.A.

von Glasersfeld, E. (1989). Cognition, construction of knowledge, and teaching. *Synthese*, *80*(1), 121-140.

von Glasersfeld, E. (1995). *Radical constructivism: A way of knowing and learning*. Studies in Mathematics Education Series.

Vygotsky, L. S. (1989). *Thought and language*. MIT Press.

Wood, D., Bruner, J. S., & Ross, G. (1976). The Role of Tutoring in Problem Solving. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, *17*(2), 89–100. https://doi.org/10.1111/j.1469-7610.1976.tb00381.x