



Artículo original

Características del modelo epistemológico dominante de la proporcionalidad en textos de educación secundaria

Characteristics of the dominant epistemological model of proportionality in secondary education textbooks

Luigi Najarro Alcócer ¹

Cintya Gonzales Hernández ^{2, a}

¹ Pontificia Universidad Católica del Perú-IREM, Perú

² Pontificia Universidad Católica del Perú-IREM, Perú

^a ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2130-1710>

cintya.gonzales@pucp.edu.pe

Información

Recibido: 02/08/2017.

Aceptado: 12/10/2017.

Palabras clave:

Modelo epistemológico, proporcionalidad, enseñanza, aprendizaje, didáctica.

Information

Keywords:

Epistemological model, proportionality, teaching, learning, didactics.

Resumen

El presente artículo tiene por objetivo describir las características del modelo epistemológico dominante de la proporcionalidad presente en los textos de Matemática de Educación Secundaria. Desarrollamos una investigación cualitativa con enfoque bibliográfico utilizando aspectos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), por ello consideramos modelos epistemológicos construidos en torno a la proporcionalidad para poder describir la organización matemática (OM) a enseñar. Revisamos cómo se presenta la proporcionalidad en los documentos curriculares en los cinco grados de secundaria. Luego describimos la OM en los textos oficiales otorgados a los estudiantes. Esta descripción la hacemos a través de los componentes de una OM. El análisis muestra 6 tipos de tareas, 11 tareas, 17 técnicas y 8 discursos tecnológicos. Las modelizaciones dominantes son la modelización discursiva y la proporcional, que en su conjunto es denominada como organización clásica de la proporcionalidad. Asimismo, en cuanto a los objetos ostensivos se evidencia una presencia notable de las tablas de proporcionalidad.

Abstract

This article aims to describe the characteristics of the dominant epistemological model of proportionality present in Secondary Mathematics textbooks. We develop a qualitative research with a bibliographical approach using aspects of the Anthropological Theory of Didactics (TAD), for this reason we consider epistemological models built around proportionality in order to describe the mathematical organization (MO) to be taught. We review how proportionality is presented in the curricular documents in the five secondary school grades. We then describe the OM in the official texts given to students. We make this description through the components of a MO. The analysis shows 6 types of tasks, 11 tasks, 17 techniques and 8 technological discourses. The dominant models are the discursive model and the proportional model, which as a whole is called the classical organization of proportionality. Likewise, in terms of ostensive objects, a notable presence of proportionality tables is evident.

INTRODUCCIÓN

El trabajo describe las características del modelo epistemológico dominante en torno a la proporcionalidad presente en los textos escolares de Matemática, que fueron distribuidos a estudiantes de instituciones públicas del Perú por el Ministerio de Educación en el año 2016. Estos materiales fueron diseñados teniendo en cuenta los indicadores de desempeño descritos en las Rutas de Aprendizaje (2015). Este análisis nos permitió identificar las características del modelo epistemológico dominante presente.

Utilizamos las herramientas de la TAD para llevar a cabo nuestro análisis de la OM a enseñar. Según la transposición didáctica, esta organización tiene influencia en la organización matemática enseñada y en la organización matemática aprendida.

La importancia del objeto matemático proporcionalidad se evidencia en que desde la antigüedad es considerada en diferentes ámbitos de la vida. Asimismo, es tomado en cuenta en diferentes currículos a nivel mundial, como por ejemplo en la ESO de España, por otro lado, es común encontrarla en los sílabos de los diferentes programas de educación superior, como en Facultades de Ciencias y Humanidades. Por ello, consideramos relevante y necesario realizar un estudio exploratorio del modelo epistemológico dominante teniendo en cuenta el Modelo Epistemológico de Referencia (MER) propuesto por García (2005), las organizaciones matemáticas presentes en los textos escolares de Secundaria y la normativa curricular.

Finalmente, es importante señalar que la relevancia de este objeto en las Evaluaciones Censales de Estudiantes, como por ejemplo en la ECE 2015 y ECE 2016 para alumnos de II de secundaria. Asimismo, es común encontrar tareas vinculadas a la proporcionalidad en los diferentes exámenes de admisión de casas de estudio de nivel superior.

Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD)

La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) propuesta por Chevallard (1999) sitúa la actividad matemática en el conjunto de actividades humanas y de instituciones sociales, considera a la didáctica de la matemática como una actividad humana y admite que “toda actividad humana regularmente realizada puede describirse con un modelo único” denominado praxeologías.

Praxeologías

La noción de praxeología constituye una herramienta fundamental para modelizar la actividad matemática, que son construcciones institucionales, como toda obra humana surge como respuesta a un conjunto de cuestiones y como medio para llevar a cabo determinadas tareas problemática. Esta presenta la siguiente estructura $[T/\tau/\theta/\Theta]$.

- **Tipos de tareas T:** Conjunto de ejercicios, problemas, o actividades propuestas.
- **Técnica τ :** Es un saber -hacer una determinada tarea. Una técnica τ es una manera de dar solución efectiva a una tarea. En nuestra investigación, consideraremos la reducción a la unidad y la *regla de tres simples* como técnicas que permiten resolver tareas específicas.
- **Tecnología θ :** Discurso que justifica racionalmente la técnica τ para asegurarse de que pueda realizar las tareas. La definición de razones y proporciones es la tecnología que justifica, por ejemplo, la técnica “regla de tres” para nuestra investigación.
- **Teoría Θ :** Justifica el discurso tecnológico. Por ejemplo, la teoría de las magnitudes variables podría justificar la tecnología que respalde la técnica de “regla de tres”.

Ostensivos en la TAD

Según Bosh (1994) se denomina ostensivo a todo objeto dotado de una naturaleza sensible, de cierta materialidad, y que, por ello, puede presentarse al sujeto como una realidad perceptible y manipulable. Podemos considerar como ostensivos a los sonidos (morfemas lingüísticos), los grafismos (grafemas que componen la escritura de las lenguas naturales y formales), los gestos, entre otros.

Los objetos ostensivos permiten evocar objetos no ostensivos, es decir, nociones matemáticas que no se pueden manipular (conceptos, definiciones, ideas, etc.). Teniendo en cuenta esta afirmación, por ejemplo, la notación $f(x)=kx$ evoca a la proporcionalidad directa. Según Bosch (1994) los objetos ostensivos tienen una valencia instrumental y una valencia semiótica dentro de una institución, un periodo de tiempo y con ciertos objetos matemáticos.

Modelo Epistemológico de Referencia (MER)

Es un modelo teórico básico construido para analizar la transición y evolución de los saberes entre diferentes instituciones. También para describir y analizar, los modelos epistemológicos dominantes en

determinadas instituciones. Según Gascón (2014) permite fijar la amplitud del problema de investigación, identificar fenómenos didácticos y elaborar explicaciones tentativas y tipos de soluciones. Un MER tiene carácter relativo, asimismo, ayuda a construir modelos alternativos didácticos en una institución dada. Este puede expresarse en forma de una sucesión de praxeologías elaboradas en base a respuestas parciales de una cuestión problemática inicial. Cada una de estas surge de la ampliación o desarrollo de la anterior ante las limitaciones de ésta para aportar respuestas a las cuestiones que se plantean.

MATERIAL Y MÉTODOS

Adoptamos un enfoque cualitativo según Hernández et al (2010) puesto que se observa, describe e intenta comprender los fenómenos tal como se presentan en su medio natural.

Asimismo, consideramos que es una investigación de tipo bibliográfica, porque, analizamos los documentos y también libros de texto. A continuación, presentaremos la secuencia de pasos que realizamos para la realización de nuestros objetivos.

- Identificamos en las Rutas de Aprendizaje el objeto matemático proporcionalidad.
- Identificamos y describimos los elementos de la OM proporcionalidad.
- Identificamos las características del modelo epistemológico dominante presente en la OM descrita teniendo en cuenta el MER de García (2005).

Estudio de la proporcionalidad. Modelización de sistemas de variación entre magnitudes

García (2005) reformula y completa los niveles de algebrización propuestos por Bolea, Bosch y Gascón (2001), y elabora un MER teniendo en cuenta las siguientes modelizaciones:

Modelización discursiva: La describe como una OM puntual, generada en torno a la técnica de “reducción a la unidad”, que permite la realización de una actividad matemática bastante limitada para sistemas lineales e lineales inversos (proporcionalidad directa e inversa). Su marco tecnológico - teórico explícito es casi inexistente, limitándose a la descripción oral de las propiedades.

Modelización proporcional: Esta modelización es conocida también como “clásica” y estará formulada en términos de razones y proporciones. Se evidencia la ausencia de una teoría del álgebra de magnitudes que justifique la realización de operaciones entre cantidades de magnitudes de diferente naturaleza (razones heterogéneas), por lo que solo se considera proporciones con razones homogéneas en la técnica de la regla de tres.

Modelización ecuacional: Puede considerarse como una organización matemática local, porque contiene cierta variedad de técnicas y de tipos de cuestiones problemáticas, más allá de la mera determinación de nuevos estados, y porque lleva a cabo ciertos cuestionamientos en el nivel tecnológico. La ampliación del marco teórico justifica las operaciones entre magnitudes y permite establecer razones heterogéneas.

Modelización funcional: En esta modelización la teoría evoluciona hasta la teoría de las funciones reales de variable real, esta da lugar a una variación ostensiva en las tecnologías, que considera la correspondencia entre M y M' como una correspondencia unívoca entre conjuntos numéricos.

La proporcionalidad en Rutas de Aprendizaje

Fueron publicadas por el Ministerio de Educación (MINEDU) en el año 2012 y se fueron reestructurando hasta su última versión en el año 2015. Considera orientaciones para el área e indicadores de desempeño para cada grado y/o ciclo y sirvieron de insumos para la elaboración de los textos escolares de Secundaria que analizamos en el presente trabajo de investigación. La proporcionalidad es identificada en los cinco grados en la competencia de cantidad y en I y II en la competencia de regularidad, equivalencia y cambio.

RESULTADOS

Análisis de los textos escolares

En la tabla 1 identificamos las tareas presentes en cada uno de los textos de Matemática de Secundaria. Podemos observar que el tipo de tareas que más situaciones presenta en los textos es el de determinar el término desconocido en una relación de magnitudes proporcionales.

Tabla 1. Tareas presentes en los textos de Matemática de Secundaria

TIPO DE TAREA	TAREA	CANTIDAD DE PROBLEMAS RESUELTOS				
		I SEC	II SEC	III SEC	IV SEC	V SEC
(T ₁): Determinar el término desconocido en una relación de magnitudes proporcionales	Tarea (t _{1,1}): Calcular el término desconocido de dos magnitudes directamente proporcionales	10	5	3	3	
	Tarea (t _{1,2}): Calcular el término desconocido en una relación de dos magnitudes inversamente proporcionales	4	4	3	3	
	Tarea (t _{1,3}): Calcular el término desconocido en una relación de más de dos magnitudes proporcionales		1	3	3	
(T ₂): Identificar magnitudes proporcionales	Tarea (t _{2,1}): Identificar magnitudes directamente proporcionales en una tabla	1	1			
(T ₃): Distribuir una cantidad en partes proporcionales a números dados	Tarea (t _{3,1}): Distribuir una cantidad en partes inversamente proporcionales a números dados	1			3	
	Tarea (t _{3,2}): Distribuir una cantidad en partes directamente proporcionales a números dados				3	
(T ₄): Interpretar la relación de dos magnitudes proporcionales como una función	Tarea (t _{4,1}): Interpretar la relación de dos magnitudes directamente proporcionales como una función lineal	3	5			
	Tarea (t _{4,2}): Interpretar la relación de dos magnitudes inversamente proporcionales como una función de proporcionalidad inversa		1			
(T ₅): Analizar la razón entre dos magnitudes	Tarea (t _{5,1}): Determinar la razón entre dos cantidades en un mismo espacio de medidas		1			1
	Tarea (t _{5,2}): Determinar una cantidad teniendo el valor de la razón					2
(T ₆): Aplicar propiedades de razones y proporciones	Tarea (t _{6,1}): Aplicar propiedades en una serie de razones					1

A continuación, en la tabla 2 se muestran los ostensivos identificados en los textos escolares analizados.

Tabla 2: Ostensivos presentes en los textos de Matemática de Secundaria

TEXTOS ESCOLARES	Ostensivos										
	$a/b = c/d$	Tabla	K: constante de proporc.	Repres. Cartes.	$a:b :: c:d$	$y = kx; y = k/x$	$f(x) = mx; f(x) = m/x$	Oper → →	Repres Sagital	Oral	
I SECUNDARIA	9	13	6	6	1	1	2	1	1	1	11
II SECUNDARIA	8	13		6		1	5		2		7
III SECUNDARIA	6	8	1			1		1			8
IV SECUNDARIA	9	9	7	2							8
V SECUNDARIA	4		1								

Autoría propia

Observamos que la mayor recurrencia de ostensivos es la tabla de proporcionalidad. Este es a la vez un registro de representación de datos y un ostensificador. Cuando los datos se representan en una tabla, las cantidades proporcionales son distinguidas; hay una mejor organización del trabajo, en particular al determinar si el valor a calcular es una imagen o un antecedente. Además, permite la materialización de la constante de proporcionalidad y de los operadores internos (adición y multiplicación) que intervienen en la situación. Asimismo, la tabla de proporcionalidad tiene una valencia instrumental ya que la técnica del producto cruzado o del producto lineal se puede utilizar para el cálculo de la cuarta proporcional si estamos trabajando problemas de proporcionalidad directa o inversa respectivamente.

Según Hersant (2001, citada en Najarro, 2018) Los ostensivos utilizados para resolver problemas de proporcionalidad tienen diferentes valencias semióticas e instrumentales. La elección de uno u otro determina la actividad matemática a realizar.

Otro de los ostensivos recurrentes es el lenguaje oral con expresiones del tipo “a más, menos” y “a menos, más”. Estos ostensivos tienen un valor instrumental porque pueden servir para el tratamiento oral de un problema de proporcionalidad inversa, aunque también pueden llevar al error de tipo conceptual si es que no se acompaña del concepto de constante de proporcionalidad, pudiendo generar así un obstáculo didáctico.

El análisis de los documentos curriculares, así como la identificación y descripción de los elementos de las organizaciones matemáticas en torno a la proporcionalidad en los textos escolares, nos permitió conocer cómo vive y/o pervive nuestro objeto de estudio en la noosfera e identificar las características del modelo epistemológico dominante.

1. Con respecto a las Rutas de Aprendizaje (2015), documento guía para la elaboración de los textos escolares, la proporcionalidad de manera explícita es considerada en los cinco grados de Educación Secundaria en la competencia: Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de cantidad. Los indicadores de desempeño están referidos a que el estudiante identifique magnitudes proporcionales y resuelva problemas utilizando como técnicas la reducción a la unidad, la regla de tres simple y la

regla de tres compuesta. Asimismo, en la competencia: Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de regularidad, equivalencia y cambio, la proporcionalidad se presenta solo en los grados de primero y segundo. Algunos indicadores de desempeño en esta competencia buscan articular la proporcionalidad directa con la función lineal y la proporcionalidad inversa con la función de proporcionalidad inversa lo que correspondería, según García (2005), a la modelización funcional de sistemas lineales y lineales inversos.

2. Con respecto al análisis de los textos escolares haciendo uso de las herramientas de la TAD, identificamos 6 tipos de tareas, 15 tareas, 23 técnicas y 8 discursos tecnológicos. Teniendo en cuenta los resultados obtenidos, podemos decir que la organización matemática es local (formado por organizaciones puntuales) y que las modelizaciones dominantes son la discursiva y la proporcional, que corresponden a la organización clásica de la proporcionalidad. En la organización clásica, se describe la proporcionalidad como una relación de dos series de números, pero los problemas y técnicas utilizadas en su mayoría siempre están relacionadas a la regla de tres, este fenómeno lo denomina la “evitación del álgebra”. Comin (2000) denomina a este fenómeno como la “numeralización de la proporcionalidad”, esto debe ser considerado como una consecuencia de la algebrización desigual de los componentes de la OM. En efecto dado que la algebrización no alcanza las técnicas, los problemas de la proporcionalidad son considerados como aritméticos y la relación de proporcionalidad pasa de una relación funcional entre variables (continuas) a ser simplemente una relación aritméticas entre números
3. En los grados de primero y segundo de secundaria se identifica una presencia de las tareas, técnicas y discursos tecnológicos correspondientes, según García (2005), a una modelización funcional de sistemas lineales y lineales inversos, siendo la constante de proporcionalidad un elemento de articulación entre la proporcionalidad y la función. Sin embargo, la actividad matemática en torno a esta modelización no llega a cimentarse pues es diluida por las tareas clásicas en torno a las funciones como, por ejemplo, encontrar dominio y rango, crecimiento, interceptos, entre otros. En tercero, cuarto y quinto de secundaria la posibilidad de articulación de la proporcionalidad y las relaciones funcionales está descartada.
4. La gran mayoría de problemas presentes en los textos escolares ya se suponen proporcionales y se define la relación de proporcionalidad de manera implícita o como una convención social y a partir de ello se utiliza las técnicas de la organización clásica.
5. En cuanto al uso de los ostensivos podemos indicar que se identifica con mayor presencia el uso de tablas para representar relaciones de proporcionalidad directa, inversa y compuesta. Asimismo, la notación clásica para representar razones y proporciones, es decir, a través de la pequeña línea horizontal que se utiliza para las fracciones, tiene también una presencia fuerte en los materiales analizados. En los textos de primero y segundo de secundaria se identifica también como ostensivos la representación cartesiana y la notación $f(x)$, que permiten articular la proporcionalidad con la función.

El discurso coloquial y cultural “a más, más” y “a menos, menos” aún persiste en los textos escolares. Aunque se trata siempre de complementar con la definición de constante de proporcionalidad, a veces no se logra. Esto podría afianzar una tecnología espontánea de los docentes en torno a la proporcionalidad y generarles confusión al momento de programar sus sesiones de aprendizaje.

DISCUSIÓN

La TAD ha sido oportuna pues brinda las herramientas para describir y analizar cuestiones relativas al estudio del objeto matemático proporcionalidad en los documentos curriculares y materiales educativos. El modelo epistemológico dominante en torno a la proporcionalidad en los materiales educativos escolares difundidos a nivel nacional por el Ministerio de Educación no es el del álgebra como instrumento de modelización pues las tareas y técnicas de la modelización discursiva y de la modelización proporcional se presentan de manera dominante en todos los grados de la Educación Secundaria.

El tipo de tarea dominante en los materiales es el de determinar el término desconocido en una relación de magnitudes proporcionales, en donde la reducción a la unidad, regla de tres simple y regla de tres compuesta se convierten generalmente en las técnicas empleadas en la mayoría de grados. Aunque la presente investigación no pretende describir las características del modelo docente en torno a la proporcionalidad, es importante tener presente el modelo epistemológico dominante pues podría tener una influencia significativa.

REFERENCIAS

- Bosch, M.; Fonseca, C.; Gascón, J. (2004). Incompletitud de las Organizaciones Matemáticas Locales en las Instituciones Escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 24 (2), p. 205-250.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-266.
- Comin, E. (2000). *Proportionnalité et fonction linéaire: caractères, cause et effets didactiques des évolutions et des réformes dans la scolarité obligatoire*. (Tesis de doctorado, Universidad de Bordeaux I, Bordeaux, Francia). Recuperado de <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00827905/>
- García, F. (2005). *La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales*. (Tesis Doctoral). Universidad de Jaén, España.
- Gonzales, C. (2014). *Una praxeología matemática de proporción en un texto universitario*. (Tesis de Maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú. Recuperado de <http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/5225>
- Hernández, R., Fernández, C., & Batista, P. (2010). *Metodología de la Investigación*. McGraw-Hill Interamericana. México.
- Hersant, M. (2005). La proportionnalité dans l'enseignement obligatoire en France, d'hier à aujourd'hui. *Repères*, IREM, 59, p. 5-41.
- Najarro, L. (2018). *Caracterización del modelo epistemológico dominante de la proporcionalidad en los textos de matemática de educación secundaria*. (Tesis de Maestría en proceso de sustentación). Pontificia Universidad Católica del Perú.
- MINEDU (2015). *Rutas de aprendizaje*. Editado por el Ministerio de Educación, del Perú. Lima.