

## Artículo original

### Límites indeterminados: una experiencia mediada por tecnología digital con estudiantes universitarios

### Indeterminate limits: a digitally mediated experience with university students

Cristian Julian Trujillo<sup>1</sup>

Flor Isabel Carrillo Lara<sup>2,a</sup>

<sup>1</sup> Universidad San Ignacio de Loyola, Perú

[edwin.julian@usil.pe](mailto:edwin.julian@usil.pe)

<sup>2</sup> Universidad Nacional del Callao, Perú

[f.carrillo@pucp.edu.pe](mailto:f.carrillo@pucp.edu.pe)

<sup>a</sup> ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4181-3513>

#### Información

Recibido: 20/06/2018.

Aceptado: 10/09/2018.

#### Palabras clave:

Límite indeterminado, mediación tecnológica, Teoría de registro de representación semiótica.

#### Information

#### Keywords:

Indeterminate limit, technological mediation, Semiotic Representation Register Theory.

#### Resumen

El presente reporte muestra una secuencia de dos tareas por medio de tablas de valores y gráficas para movilizar la noción de límites indeterminados en un curso de matemáticas con estudiantes de primer ciclo de una universidad de Lima-Perú. Como marco teórico consideramos la Teoría de Registros de Representación Semiótica. La metodología es cualitativa. Se utiliza como medio la calculadora Casio fx-991 ClassWiz. Se analiza en las producciones de los estudiantes, cuando coordinan registros de representación semiótica. Además, los resultados revelan que coordinan los registros de lengua natural, algebraico, tabular y gráfico. Asimismo, muestran la pertinencia de la tecnología digital utilizada.

#### Abstract

This report shows a sequence of two tasks using tables of values and graphs to mobilize the notion of indeterminate limits in a mathematics course with first cycle students of a university in Lima-Peru. As theoretical framework we consider the Theory of Semiotic Representation Records and the methodology is qualitative. The Casio fx-991 ClassWiz calculator is used as a medium. In the students' productions, we analyze how they coordinate semiotic representation registers. In addition, the results reveal that they coordinate natural language, algebraic, tabular and graphic registers. They also show the relevance of the digital technology used.

## INTRODUCCIÓN

La labor del docente en el aula y los resultados que obtiene, nos hace reflexionar sobre cómo enseñar y lograr que el estudiante de las carreras de ciencias, en nuestro caso, logren comprender y apoderarse de la noción de límites indeterminados. En este sentido, nuestro interés se enfoca en efectuar una secuencia de dos tareas para trabajar los límites indeterminados en un primer curso de matemáticas con estudiantes de primer ciclo de carreras de una universidad de Lima-Perú. Las tareas fueron elaboradas tomando como base aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (1995), en la que se utiliza como medio la calculadora científica Casio *fx-991 ClassWiz*. En cuanto a la metodología empleada es de corte cualitativo, en el sentido de Borba (2004), quien explica la pertinencia de este tipo de metodología cuando se realizan investigaciones en Educación Matemática. Por ello, reflexionamos sobre la pertinencia de la tecnología digital como parte del proceso de enseñanza y de aprendizaje, y sobre la importancia de las diferentes representaciones que se deben movilizar al trabajar con tecnología.

### Mediación de la calculadora científica

Exploramos el uso de la tecnología digital, calculadora *Casio fx-991 ClassWiz*, con la finalidad de favorecer la movilización de la noción de límites indeterminados en estudiantes ingresantes (primer curso de matemáticas en la universidad). Para ello, presentamos a los estudiantes dos tareas de límites indeterminados siendo el objetivo interpretar la información entregada en representaciones tabulares, algebraicas. En la resolución de las tareas planteadas se realizan procesos de conversión entre los distintos tipos de representaciones, como las del registro algebraico al tabular y del gráfico al algebraico. Consideramos necesario incorporar progresivamente el uso de este modelo de calculadora debido a funciones de interfaz ideales para la educación.

Es en este sentido, pensamos que la tecnología simplifica procesos algorítmicos y enfoca la atención en la exploración, manipulación, contraste e interpretación de los resultados de cálculo, concentrándose en la comprensión de las tareas y en el análisis de la solución de las mismas. Al respecto, Trouche (2005) considera que en el trabajo con calculadoras necesita ser construido por los docentes, de manera que potencien en sus estudiantes actitudes favorables y una mejor relación con el conocimiento matemático; además, acota que la tecnología no simplifica el trabajo del docente ni del estudiante, sino que requiere la construcción de una enseñanza compleja y un ambiente de aprendizaje adecuado.

### Aspectos teóricos y metodológicos

Tomamos como base aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (1995), pues de acuerdo con el investigador aprender matemáticas involucra actividades cognitivas como la conceptualización, el razonamiento y la resolución de problemas; Además, afirma que en la actividad matemática se deberían coordinar diferentes registros de representación semiótica como el registro de lengua natural, el registro algebraico, el registro figural, el registro tabular y el registro gráfico. En relación a la coordinación de registros, afirma que “La coordinación de muchos registros de representación semiótica es fundamental para una aprehensión conceptual de objetos, es preciso que un objeto no sea confundido con sus representaciones y que sea reconocido en cada una sus representaciones posibles” (Duval 2012, p. 5). En este sentido, en la comunicación breve, nos hemos centrado en analizar y evidenciar la coordinación de los registros algebraico y gráfico.

## MATERIAL Y MÉTODOS

En relación a los aspectos metodológicos, la investigación que desarrollamos es cualitativa, pues según Borba (2004) en una investigación cualitativa en Educación Matemática se priorizan los procedimientos, la descripción y el análisis pues conocimiento explícitamente admite una interferencia subjetiva.

### La aplicación de las tareas

La investigación se realizó con estudiantes, de las carreras de primer ciclo, de una universidad de Lima-Perú, cuyas edades van desde los 16 a 18 años. Se realizó una sesión en la que desarrollaron dos tareas. La primera tarea corresponde a la exploración de aproximación; es decir, una introducción a la noción de límites, se presenta una función racional  $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$  en el registro algebraico donde los estudiantes hacen uso de la calculadora científica, en particular de las interfaces tabla y calcular. Con la interfaz tabla se tabula los datos en un rango de 2.1 a 3.5 con incrementos de 0.1. Se observa que los valores evaluados en la función dada son cada vez más cercanos a 6 y cuando es evaluado en el punto  $x = 3$  la calculadora nos muestra error; es decir, la función no está definida en ese valor. Debido a ello nos apoyamos en la interfaz calcular para evaluar valores más próximos a 3, o sea  $x > 3$  y  $x < 3$  empleando incrementos menores a 0.1. De esta manera el estudiante conjetura ante todo lo trabajado que:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x-3} = 6.$$

## RESULTADOS

Los resultados de la investigación con los estudiantes, presentamos en diversos escenarios a través de tareas que se han desarrollado, lo cual nos ha permitido alcanzar los objetivos. Y es tal como sigue: en la figura 1, presentamos la tarea 1:

Dada la función:  $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$

Complete los valores de la siguientes tablas. Hacer uso de la calculadora *Casio fx-991*

**Tabla 1: Uso de la interfaz *tabla***

$x$	$f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$
2.4	
2.5	
2.6	
2.7	
2.8	
2.9	
3	
3.1	
3.2	
3.3	
3.4	

**Tabla 2: Uso de la interfaz *calcular***

$x$	$f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$
2.9	
2.99	
2.999	
2.9999	
3	
3.00001	
3.0001	
3.001	
3.01	

A partir de todo lo anterior, responda las siguientes preguntas:

- ¿Qué puede inferir con respecto a los valores obtenidos en las tablas 1 y 2?
- ¿Cuál es el valor de la imagen de la función  $f$  cuando  $x = 3$ ? Justifique su respuesta.
- A partir de lo trabajado, calcule:  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x-3}$

Figura 1: Tarea 1-noción de límite.

Con respecto a la resolución de esta tarea 1 podemos manifestar que participaron 28 estudiantes de manera grupal (4 estudiantes por grupo), previamente se les hizo una inducción de cada interfaz (tabla y calcular), posterior a ello los estudiantes completaron las tablas y respondieron satisfactoriamente 6 grupos a las preguntas dadas, con respecto a ello los estudiantes conjeturaron que mientras la variable  $x$  toma valores más próximos a 3 su imagen se aproxima a 6. Además, uno de los grupos no logró resolver la tarea de la manera esperada debido a que no interpretó correctamente la noción de aproximación.

En la figura 2, mostramos la resolución de la tarea 1 por el grupo A, quienes resolvieron correctamente todos los ítems.

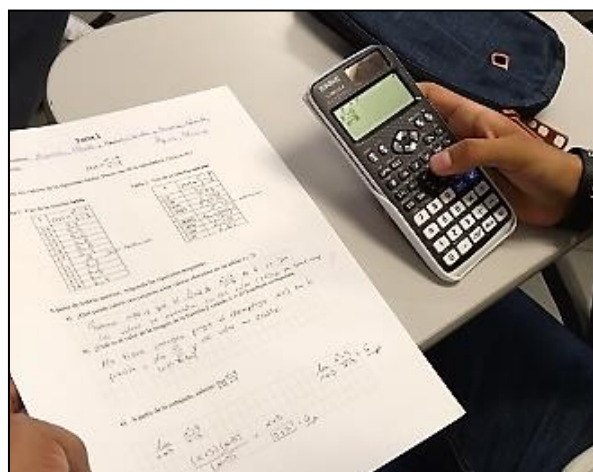


Figura 2: Resolución de la tarea 1-grupo A

Por otro lado, en la figura 3 mostramos la resolución del grupo B, quienes no respondieron correctamente 2 de los ítems propuestos.

Dada la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

Complete los valores de la siguientes tablas. Hacer uso de la calculadora Casio fx-991

Tabla 1: Uso de la interfaz **tabla**

x	$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$
2.4	5.4
2.5	5.5
2.6	5.6
2.7	5.7
2.8	5.8
2.9	5.9
3	ERR
3.1	6.1
3.2	6.2
3.3	6.3
3.4	6.4

Tabla 2: Uso de la interfaz **calcular**

x	$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$
2.9	5.9
2.99	5.99
2.999	5.999
2.9999	5.9999
3	ERR
3.00001	6.00001
3.0001	6.0001
3.001	6.001
3.01	6.01

A partir de todo lo anterior, responda las siguientes preguntas:

a) ¿Qué puede inferir con respecto a los valores obtenidos en las tablas 1 y 2?

b) ¿Cuál es el valor de la imagen de la función  $f$  cuando  $x = 3$ ? Justifique su respuesta.

c) A partir de lo trabajado, calcule:  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$

Figura 3: Resolución de la tarea 1-grupo B

Para fortalecer la noción de límites laterales presentamos la tarea 2, que corresponde a identificar los límites laterales a partir de la gráfica de una función en un punto dado. Para la solución de esta tarea, se hace uso de lápiz y papel.

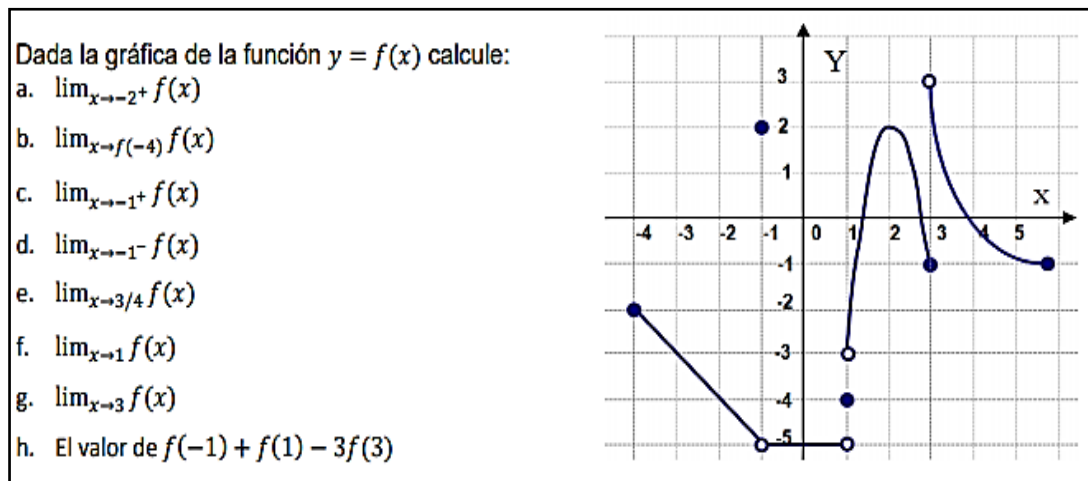


Figura 4: Tarea 2-límites laterales.

Con respecto a la resolución de la tarea 2, los estudiantes trabajaron de manera individual; previamente se desarrolló la definición de la existencia de un límite; es decir, tenían los conocimientos previos necesarios para resolver la tarea. Observando la gráfica de la función  $f$  y teniendo en cuenta la definición

de límites laterales esperamos que realicen la tarea 2 de manera satisfactoria. Sin embargo, podemos ver en la figura 3 que el estudiante 1 muestra errores en todos los ítems relacionados con límites laterales.

Solución:

a)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{1}{2}$   
 $x > 2$

b)  $\lim_{x \rightarrow f(4)} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \frac{1}{2}$

c)  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{1}{2}$   
 $x > -1$

d)  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{1}{2}$   
 $x < -1$

e)  $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{4}} f(x) = \frac{1}{2}$ , en el punto  $\frac{3}{4}$  no pertenece a la gráfica

f)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -4$

g)  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -1$

h) Se el valor de  $f(-1) \rightarrow f(1) - 3f(3)$   
 $f(-1) = 2$   
 $f(1) = -4$   
 $f(3) = -1$   
 entonces  
 $R = \frac{f(-1) + f(1) - 3f(3)}{2 - 4 - 3(-1)}$   
 $2 - 4 + 3 = 1$

Figura 5: Tarea 2-estudiante1

Por otro lado, el estudiante 2 desarrolló con éxito 4 de los ítems, tal como se evidencia en la figura 6, realizando tratamientos, en el sentido de Duval.

a.  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -4$   
 $x > 2$

b.  $\lim_{x \rightarrow f(4)} f(x) =$   
 Se observa en la gráfica  $f(4) = -2$   
 $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -4$

c.  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-0.99) = -5$   
 $x > -1$

d.  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(0.99) = -3$   
 $x < -1$

e)  $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{4}} f(x) = -5$   
 $x > \frac{3}{4}$

f.  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{1}{2}$

g.  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -1$

h)  $f(-1) + f(1) - 3f(3)$   
 $2 + (-4) - (3(-1))$   
 $2 - 4 + 3 = 1$

Figura 6: Tarea 2-estudiante2

El objetivo de las tareas es que los estudiantes coordinen diferentes registros de representación semiótica, como el registro algebraico, el registro tabular y el registro gráfico. Como resultado, notamos que los estudiantes coordinaron los distintos tipos de registro algebraico, tabular y gráfico. Además, los estudiantes lograron los tratamientos y conversiones del objeto en estudio límites indeterminados y límites laterales.

## DISCUSIÓN

Se evidencia con respecto a la pertinencia del uso de la tecnología digital; en particular, la calculadora *Casio fx-991 ClassWiz* en tareas que favorecen la exploración, indagación y conjetura de propiedades de los objetos matemáticos que se pueden representar con este medio tecnológico, en nuestro caso límites indeterminados ya que se trata de un concepto abstracto.

## REFERENCIAS

- Borba, M. (2004). A pesquisa qualitativa em Educação Matemática. *CD nos Anais da 27ª reunião anual da Anped, Caxambu, MG*.
- Casio, <http://www.casio-intl.com/latin/es/calc/scientific/classwiz/>
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang.
- Duval, R. (2012). *Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento*. (M. Thadeu, Trad.) Florianópolis, Brasil.
- Trouche, L. (2005). Calculators in Mathematics Education: A rapid evolution of tools, with differential effects. En D. Guin, K. Ruthven y L. Trouche (Eds), *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators*. New York, USA: Springer