



## Taller en coloquio



V COLOQUIO BINACIONAL SOBRE LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

V COBISEMAT

V Coloquio Binacional sobre la Enseñanza de las Matemáticas, Universidad Nacional de Tumbes, 28 y 29 de mayo de 2021 (V COBISEMAT)

## Sólidos por secciones transversales usando GeoGebra

### Solids by transversal sections using GeoGebra

Elizabeth Advíncula Clemente<sup>1, a</sup> Nancy Saravia Molina<sup>2, b</sup>

<sup>1</sup> Pontificia Universidad Católica del Perú  
Instituto de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas IREM-PUCP. Lima, Perú  
<sup>a</sup> ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3941-3139>

[eadvincula@pucp.edu.pe](mailto:eadvincula@pucp.edu.pe)

<sup>2</sup> Pontificia Universidad Católica del Perú  
Instituto de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas IREM-PUCP. Lima, Perú  
<sup>b</sup> ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2819-8835>

[nsaraviam@pucp.edu.pe](mailto:nsaraviam@pucp.edu.pe)

#### Información

Recibido: 14/03/2021.

Aceptado: 10/05/2021.

#### Palabras clave:

Visualización, sólidos, secciones transversales, GeoGebra.

#### Information

#### Keywords:

Visualization, solids, transversal sections, GeoGebra.

#### Resumen

En el estudio del cálculo integral nos encontramos con diversas dificultades, entre ellas determinar el volumen de sólidos por secciones transversales, siendo un problema fundamental en estos casos encontrar la función que determine el área de la sección transversal. El objetivo de este taller es usar el GeoGebra como una herramienta que favorece la visualización de los sólidos por secciones transversales, en particular de la sección transversal, cuya manipulación resulta complicada para los estudiantes al trabajar en un entorno estático con lápiz y papel. El taller está dirigido a docentes de educación superior. Propondremos actividades para que trabajen con diversas herramientas del GeoGebra y puedan realizar construcciones dinámicas, y a partir de la manipulación e interacción con ellas elaboraren y validen sus conjeturas acerca de las características de las secciones transversales de los sólidos mencionados. Al finalizar cada actividad tendremos un espacio para reflexionar la pertinencia del uso del GeoGebra en sus clases, analizando las ventajas y desventajas.

#### Abstract

In the study of integral calculus, we encounter several difficulties, among them determining the volume of solids by cross sections, being a fundamental problem in these cases to find the function that determines the area of the cross section. The objective of this workshop is to use GeoGebra as a tool that favors the visualization of solids by transversal sections, in particular the cross section, whose manipulation is complicated for students when working in a static environment with pencil and paper. The workshop is aimed at higher education teachers. We will propose activities so that they can work with different GeoGebra tools and make dynamic constructions, and from the manipulation and interaction with them, elaborate and validate their conjectures about the characteristics of the cross sections of the mentioned solids. At the end of each activity we will have a space to reflect on the relevance of the use of GeoGebra in their classes, analyzing the advantages and disadvantages.

## INTRODUCCIÓN

En matemática, la comprensión de varios conceptos matemáticos requiere de la posibilidad de crear una imagen visual de un concepto abstracto. Es así que este trabajo tiene como objetivo mostrar actividades relacionadas con el volumen de sólidos por secciones transversales, que incorporan la visualización como mediadora en el proceso de enseñanza y aprendizaje a partir del uso de la tecnología.

En el curso de cálculo integral, cuando trabajamos volúmenes de sólidos por el método de secciones transversales observamos que la visualización de los sólidos involucrados no es fácil para los estudiantes, debido en parte porque nos limitamos a representar figuras.

Observamos que una de las dificultades que presentan los estudiantes es encontrar la función que determina el área de la sección transversal, dado que no existe explícitamente un método para ello pues encontrar esta función depende de las condiciones dadas en el problema y de los conocimientos que se tengan.

Convencidos que la visualización de los sólidos facilita a los estudiantes la comprensión de dichas figuras, incorporamos en nuestras clases el uso de recursos tecnológicos como el GeoGebra, que es un software libre que permite construir sólidos y manipularlos para visualizar sus principales características y propiedades.

Por otro lado, la necesidad de incorporar la visualización en el trabajo con conceptos matemáticos abstractos a fin de hacer visibles elementos que no se puedan percibir a simple vista ha generado diversas investigaciones en relación al potencial didáctico de la visualización. En este sentido, Di Domenicantonio, Costa y Vacchino (2011, p. 76) consideran “a la visualización como un proceso mental interno, el que puede utilizarse con efectividad para el descubrimiento y comprensión de nociones matemáticas que involucran sensación, imaginación y manipulación mental de los objetos”.

## Enfoque teórico

Actualmente, la visualización en el aprendizaje de las matemáticas viene siendo reconocida como una componente importante en la resolución de problemas, así como en la realización de demostraciones (Battista, 2007; Presmeg, 2006, Phillips et al., 2010 y Rivera, 2011).

Según Arcavi (2003, p. 217) "la visualización es la capacidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre retratos, imágenes, diagramas, en nuestras mentes, en el papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas previamente desconocidas y comprensiones avanzadas". Coincidimos con esta definición pues en los problemas que nos interesa abordar en nuestro taller es muy importante contar con un esquema o representación gráfica que nos permita reconocer las características de los sólidos que se obtienen al seccionarlos usando distintas formas de secciones transversales y cómo estos cambios en las secciones transversales afectan los volúmenes de los sólidos en cuestión.

Desde el punto de vista de Duval (1999), la representación y la visualización son el centro de la comprensión en matemáticas, y por tal, es fundamental analizar en qué medida estos elementos interactúan para producir aprendizaje. Asimismo, señala que el uso de representaciones semióticas es esencial para acceder a los objetos matemáticos; cuya comprensión involucra distinguir un objeto de su representación. Duval (2016) también señala que la conversión requiere el uso interactivo de dos registros de representación semiótica o más, pero para garantizar la comprensión es necesaria la coordinación de representaciones formuladas en diferentes registros.

Asimismo, consideramos que el GeoGebra es un artefacto, que en términos de Rabardel (1995) podría convertirse en un instrumento a través de un proceso de génesis instrumental, el cual permite identificar los esquemas de utilización que construyen y movilizan los sujetos cuando interactúan con el GeoGebra al resolver problemas matemáticos, elaborar y verificar conjeturas. En este sentido, el GeoGebra facilita la visualización, el descubrimiento y el reconocimiento de propiedades invariantes en los objetos matemáticos involucrados (Madama y Curbelo, 2012) así como la comprensión de las características propias de los sólidos seccionados por distintas secciones transversales debido al dinamismo y flexibilidad que presenta este software para realizar construcciones y modificaciones.

En este trabajo presentamos algunas actividades vinculadas a los sólidos generados por secciones transversales, donde se incorpora la visualización como mediadora en el proceso de enseñanza y aprendizaje a partir del uso de la tecnología.

## **Diseño e implementación del taller**

Las actividades que proponemos en este taller buscan identificar el conocimiento matemático que tienen los docentes para articular aspectos algebraicos y geométricos que demanda la construcción de sólidos por secciones transversales, así como el uso que hacen de la tecnología como recurso en la enseñanza y aprendizaje de estos sólidos.

Las actividades propuestas tienen por objetivo que los docentes de matemática resuelven problemas relacionados con sólidos generados por secciones transversales, reconociendo las propiedades de dichos sólidos a partir de la exploración, manipulación, elaboración y validación de conjeturas, haciendo uso del GeoGebra.

Este taller se desarrollará en una sesión de 90 minutos, en el cual los participantes deberán contar con la instalación del GeoGebra en su computadora, para poder desarrollar las actividades propuestas. En primer lugar, los docentes realizarán un trabajo individual y luego se realizará una discusión con todos los participantes para intercambiar estrategias de solución y diversos modos de validación de conjeturas.

En un primer momento, los participantes tendrán 15 minutos para desarrollar la actividad 1 sobre la construcción de circunferencias, de manera individual, explorando las vistas y herramientas del GeoGebra que considere necesarias para realizar las construcciones correspondientes. Luego, tendremos 15 minutos para socializar los resultados obtenidos por todos los participantes, y de ser necesario se solicitará a alguno de los participantes compartir su pantalla de trabajo y haremos la retroalimentación correspondiente. En un segundo momento, los participantes tendrán 25 minutos para desarrollar de forma individual la actividad 2 sobre la construcción de los sólidos por secciones transversales. Luego, tendremos 25 minutos para que los participantes compartan sus pantallas y de esa manera sus resultados, para juntos analizar las diversas maneras en que abordaron sus construcciones. En los últimos 10 minutos reflexionaremos sobre las ventajas y desventajas que ofrece el GeoGebra respecto a la visualización de sólidos construidos por secciones transversales y cómo esto favorece la resolución de problemas que involucran a dichos sólidos.

A continuación, mostramos las actividades diseñadas para ser trabajadas con los docentes participantes.

### **Actividad 1:** Construcción de semicircunferencias

- a) Construya una circunferencia con centro en el origen de coordenadas y radio 4 unidades.
- b) Construya el arco superior de la circunferencia y denótelo como  $f$ .
- c) Ubique un punto sobre el arco superior de la circunferencia y denótelo con la letra  $A$ , y deslícelo sobre el arco  $f$ .
- d) Construya el arco inferior de la circunferencia, denótelo como  $g$ .
- e) Ubique un punto sobre el arco inferior de la circunferencia y denótelo con la letra  $B$ , y deslícelo sobre el arco  $g$ .
- f) Construya un segmento perpendicular al eje  $X$  que una los puntos  $A$  y  $B$ , y deslice dicho segmento usando el deslizador y la animación.
- g) Comente lo que observa.
- h) Responda lo siguiente:
  - h1) ¿Qué hizo para resolver esta actividad?
  - h2) ¿Qué conceptos matemáticos uso para resolver esta actividad?
  - h3) ¿Qué capacidades matemáticas podría desarrollar un estudiante a través de esta actividad?

### **Actividad 2:** Construcción de sólidos con base circular

- a) Construya una circunferencia con centro en el origen de coordenadas y radio 4 unidades.

- b) Construya un sólido con secciones transversales perpendiculares al diámetro de la base que son cuadrados con un lado contenido en la base del sólido.
- c) Construya un sólido con secciones transversales perpendiculares al diámetro de la base que son triángulos rectángulos isósceles con un cateto contenido en la base del sólido.
- d) Construya un sólido con secciones transversales perpendiculares al diámetro de la base que son semicírculos con su diámetro contenido en la base del sólido.
- e) Comente los cambios que observa en el sólido al variar las secciones transversales.
- f) ¿Alguno de los sólidos construidos, le parece conocido? Responda lo siguiente:
  - f1) ¿Qué hizo para resolver esta actividad?
  - f2) ¿Qué conceptos matemáticos uso para resolver esta actividad?
  - f3) ¿Qué capacidades matemáticas podría desarrollar un estudiante a través de esta actividad?

## RESULTADOS

En la Actividad 1, esperamos que los participantes construyan el arco superior e inferior de una circunferencia de manera independiente, de modo que representen dos funciones distintas. Para que luego puedan usar un deslizador en el arco superior e inferior, y cuando construyan el segmento que une los puntos del arco superior e inferior sea perpendicular al diámetro de la circunferencia.

Cabe mencionar que construir la circunferencia completa usando GeoGebra, obstruye la posterior construcción del segmento que deseamos resulte perpendicular al diámetro de la circunferencia.

En la Actividad 2, esperamos que los participantes incluyan el proceso de construcción realizado en la Actividad 1, y de acuerdo a las secciones transversales indicadas puedan formar diferentes sólidos y puedan visualizar los sólidos que se forman, identificando en cada caso características propias de dichos sólidos. Consideramos que una herramienta importante en esta actividad es la construcción de las secciones transversales, pues estas requieren primero de una construcción algebraica para luego realizar la construcción en GeoGebra. Este proceso no es sencillo pues se necesita establecer conexiones entre la parte algebraica y la parte geométrica.

## CONSIDERACIONES FINALES

Consideramos que debido a la versatilidad que ofrece el GeoGebra podemos visualizar el sólido que se forma al considerar diferentes secciones transversales, identificando las semejanzas y diferencias entre dichos sólidos a partir de las características propias de cada sólido que se obtiene. Consideramos que las herramientas que ofrece el GeoGebra facilitan la construcción de los sólidos por secciones transversales, a diferencia de una construcción realizada con lápiz y papel; lo cual ayuda a una mejor visualización de la sección transversal con la cual se está trabajando al manipular los sólidos obtenidos. Lo que finalmente deriva en una mejor comprensión de los sólidos por secciones transversales, facilitando la determinación de la función que determina el área de las secciones transversales involucradas. Cabe resaltar que la comprensión de los aspectos geométricos y algebraicos vinculados a los sólidos construidos por secciones transversales es fundamental al momento de determinar el volumen de dichos sólidos.

Finalmente, consideramos importante tener un espacio para reflexionar sobre la incorporación del GeoGebra en nuestras clases, de modo que responda a una intención de favorecer el aprendizaje de nuestros estudiantes.

## REFERENCIAS

- Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 215-241.
- Battista, M. T. (2007). *The development of geometric and spatial thinking*. In F. Lester, (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 843-908). Information Age Publishing.

- Di Domenicantonio, R, Costa. V, & Vacchino, M.C. (2011). La visualización como mediadora en el proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo Integral. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 27, 75-87.
- Duval, R. (1999). *Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking*. In F. Hitt & M. Santos (Eds.), Proceedings of the 21st Annual Meeting North American Chapter of the International Group of PME, 3-26.
- Duval, R. (2016). *Un análisis cognitivo de problemas de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas*. En Duval R. y Sáenz-Ludlow A. (Eds.), *Comprensión y Aprendizaje en matemáticas: Perspectivas Semióticas Seleccionadas*, Capítulo 2, pp. 61-94. Colombia.
- Madama, M. & Curbelo, M. (2012). Visualizar, conjeturar y demostrar utilizando el software GeoGebra. *Acta de la Conferencia Latinoamericana GeoGebra*, 109-116.
- Presmeg, N. C. (2006). *Research on visualization in learning and teaching mathematics*. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 205-235). Sense Publishers.
- Phillips, L.M., Norris, S.P., & Macnab, J.S. (2010). *Visualization in mathematics, reading and science education*. Springer.
- Rabardel, P. (1995). *Los hombres y las tecnologías. Visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos*. Traducido por M. Acosta. Universidad Nacional de Santander, Colombia. Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas.
- Rivera, F. D. (2011). *Toward a visually-oriented school mathematics curriculum*. Research, theory, practice, and issues. Springer.