



Taller en coloquio



V COLOQUIO BINACIONAL SOBRE LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

V COBISEMAT

V Coloquio Binacional sobre la Enseñanza de las Matemáticas, Universidad Nacional de Tumbes, 28 y 29 de mayo de 2021 (V COBISEMAT)

Límite de una sucesión con GeoGebra

Limit of a sequence with GeoGebra

Ana Lucía Arias Balarezo^{1,a} Jimmy Muela Pillajo² Jhon Lima Yarpaz³

¹ Universidad Central del Ecuador

^a <https://orcid.org/0000-0002-2317-9600>

alarias@uce.edu.ec

² Universidad Central del Ecuador

jamuelap@uce.edu.ec

³ Universidad Central del Ecuador

jjlima@uce.edu.ec

Información

Recibido: 14/03/2021.

Aceptado: 10/05/2021.

Palabras clave:

Teoría APOE,
Descomposición
Genética, Concepto de
Límite, GeoGebra.

Information

Keywords:

APOE Theory, Genetic
Decomposition, Limit
Concept, GeoGebra.

Resumen

El presente taller tiene por objetivo analizar de qué manera se puede usar el software GeoGebra en la enseñanza-aprendizaje de la concepción dinámica del concepto de límite para estudiantes de Bachillerato General Unificado, el sustento teórico de la misma constituye la teoría APOE de Dubinsky en lo que se refiere a la descomposición genética del concepto de límite de una función. Esta investigación es cualitativa de nivel exploratorio-descriptivo, se utilizó tanto una investigación bibliográfica documental como una investigación de campo, para lo cual se elaboró un instrumento compuesto por cinco tareas didácticas que cuenta con preguntas de selección múltiple y de completar, presentadas en la plataforma Geogebra.org. Uno de los principales resultados que se espera alcanzar es una mayor comprensión del concepto de límite por medio del sistema de representación gráfico en comparación con los otros sistemas de representación.

Abstract

The objective of this workshop is to analyze how the GeoGebra software can be used in the teaching-learning of the dynamic conception of the concept of limit for students of the Unified General Baccalaureate, the theoretical support of it constitutes the APOE theory of Dubinsky in what which refers to the genetic decomposition of the concept of limit of a function. This research is qualitative at an exploratory-descriptive level, both a documentary bibliographical research and a field research were used, for which an instrument composed of five didactic tasks was developed that has multiple choice and completion questions, presented on the platform. Geogebra.org. One of the main results that is expected to be achieved is a greater understanding of the concept of limit through the graphic representation system compared to the other representation systems.

INTRODUCCIÓN

La Matemática es una de las ciencias que mayor dificultad presenta en el proceso de enseñanza-aprendizaje tanto para docentes como para estudiantes, principalmente porque posee una naturaleza abstracta, ya que al poseer conceptos que no pueden ser representados visualmente, es necesario generar estructuras mentales que permitan alcanzar la comprensión de estos conocimientos matemáticos (Socas, 2007). La importancia del proceso enseñanza-aprendizaje radica en que por medio del mismo se lleva a cabo la formación tanto personal como profesional del estudiante, esto con el fin de formar seres humanos íntegros (Cottrill, et al., 1996). Es por ello que el presente trabajo, de carácter cualitativo, busca analizar de qué manera se puede usar el software Geogebra en la enseñanza-aprendizaje de la concepción dinámica del concepto de límite para estudiantes de Bachillerato General Unificado. La razón por la que

se seleccionó este conocimiento matemático en concreto, se debe a que es uno de los temas base del Cálculo y además uno de los conceptos que presenta mayor complejidad para los estudiantes de bachillerato.

Para poder identificar las principales dificultades que surgen durante el proceso enseñanza-aprendizaje se llevó a cabo una investigación bibliográfica en la que analizamos varios elementos como; las principales teorías de aprendizaje, entre las que destaca la Teoría APOE, los obstáculos epistemológicos, las diversas definiciones del concepto de límite, la forma en cómo aprende el estudiante dicho concepto (Vrancken, et, al, 2006) y la incidencia del software matemático GeoGebra. Posterior a ello, procede una investigación de campo en la que se aplicó un cuestionario compuesto por cinco tareas didácticas a los estudiantes de bachillerato previamente seleccionados. Todo este proceso fue necesario para diseñar una propuesta didáctica, basada en GeoGebra, que aspira a superar las dificultades identificadas en la comprensión del concepto de límite de una función.

MATERIAL Y MÉTODOS

Con este taller se pretende alcanzar lo siguiente:

- Analizar de qué manera se puede usar el software GeoGebra en la enseñanza-aprendizaje de la concepción dinámica del concepto de límite para estudiantes de Bachillerato General Unificado.
- Establecer los principales recursos de GeoGebra necesarios para propiciar el aprendizaje de la concepción dinámica del concepto de límite.
- Establecer las características que debe tener una propuesta didáctica para la enseñanza de la concepción dinámica del concepto de límite de una función usando GeoGebra.

A continuación, se describen cada una de las tareas didácticas que se proponen a través del software matemático GeoGebra, en cada una de ellas se adjuntan el enlace que dirige a dichas tareas, además se detallan los objetivos que se pretende alcanzar con los estudiantes, el mecanismo desarrollado y también el sistema de representación que se utilizó.

TAREA 1

Esta tarea está compuesta por cinco ejercicios como se puede evidenciar en el enlace <https://www.geogebra.org/m/dtcbafqj>, los cuales se centran en el desarrollo del mecanismo de *idea de función* (M1) que corresponde a la descomposición genética seleccionada con anterioridad (Trigueros, 2005), para ello se emplea el sistema de representación gráfico. Los objetivos que se espera que el estudiante alcance con esta tarea son los siguientes:

- O1.** Determinar el valor de la imagen de $f(x)$ a partir de un sistema de representación gráfico en un conjunto de puntos finitos.
- O2.** Identificar el sistema de representación algebraico correspondiente a la imagen de $f(x)$ para un determinado valor de x .

TAREA 2

Esta tarea está compuesta por dos ejercicios como se puede evidenciar en el enlace <https://www.geogebra.org/m/cvjzdpnk>, los cuales se centran en el desarrollo del mecanismo de *interiorización* (M2) de la acción de evaluar y *coordinación* (M3) tanto del proceso de evaluar x cuando se aproxima a un número a , como del proceso de evaluar $f(x)$ cuando se aproxima a L que corresponde a la descomposición genética seleccionada con anterioridad, para ello se emplea el sistema de representación numérico. Los objetivos que se espera que el estudiante alcance con esta tarea son los siguientes:

- O3.** Visualizar mentalmente la relación existente entre un valor de x con su respectiva imagen de $f(x)$.
- O4.** Identificar la aproximación sucesiva de x , por derecha e izquierda, a un determinado número a , a partir del sistema de representación numérico.

- O5.** Identificar la aproximación sucesiva de la imagen de $f(x)$, por derecha e izquierda, a un determinado número L , a partir del sistema de representación numérico.

TAREA 3

Esta tarea está compuesta por tres ejercicios como se puede evidenciar en el enlace <https://www.geogebra.org/m/evkbed7z>, los cuales se centran en el desarrollo del mecanismo de *interiorización* (M2) de la acción de evaluar y *coordinación* (M3) tanto del proceso de evaluar x cuando se aproxima a un número a , como del proceso de evaluar $f(x)$ cuando se aproxima a L que corresponde a la descomposición genética seleccionada con anterioridad, para ello se emplea el sistema de representación gráfico. Los objetivos que se espera que el estudiante alcance con esta tarea son los siguientes:

- O6.** Identificar la aproximación sucesiva de x , por derecha e izquierda, a un determinado número a , a partir del sistema de representación gráfico.
- O7.** Identificar la aproximación sucesiva de la imagen de $f(x)$, por derecha e izquierda, a un determinado número L , a partir del sistema de representación gráfico.
- O8.** Reflexionar sobre el proceso de aproximar x al valor a para poder obtener el proceso de $f(x)$ aproximándose a L , cuando las secuencias numéricas son o no coincidentes, por medio del sistema de representación gráfico.

TAREA 4

Esta tarea está compuesta por tres ejercicios como se puede evidenciar en el enlace <https://www.geogebra.org/m/ph3tdygz>, los cuales se centran en el desarrollo del mecanismo de *coordinación* (M3) tanto del proceso de evaluar x cuando se aproxima a un número a , como del proceso de evaluar $f(x)$ cuando se aproxima a L y de *encapsulación* (M4) que corresponde a la descomposición genética seleccionada con anterioridad, para ello se emplea el sistema de representación gráfico. Los objetivos que se espera que el estudiante alcance con esta tarea son los siguientes:

- O9.** Reflexionar sobre el proceso de aproximar x al valor a para poder obtener el proceso de $f(x)$ aproximándose a L , cuando las secuencias numéricas son o no coincidentes, por medio del sistema de representación gráfico.
- O10.** Describir formalmente la existencia o no del límite L de una función $f(x)$ en el punto a , por medio de la expresión $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

TAREA 5

Esta tarea está compuesta por dos ejercicios como se puede evidenciar en el enlace <https://www.geogebra.org/m/txjqvxyz>, los cuales se centran en el desarrollo del mecanismo de *desencapsulación* (M5) que corresponde a la descomposición genética seleccionada con anterioridad, para ello se emplea el sistema de representación gráfico. Los objetivos que se espera que el estudiante alcance con esta tarea son los siguientes:

- O11.** Expandir su estructura de conocimiento a partir de las características y propiedades comunes que ya domina.
- O12.** Alcanzar un punto de vista más amplio sobre el concepto de límite, identificando el límite en el infinito.

Por último, en la Tabla 1 se muestra de manera sintetizada las características de cada una de las tareas didácticas que componen el instrumento de recolección de información.

Tabla 1. Características generales de las tareas didácticas

TAREA	Ejercicio	Mecanismo	S. de representación	Coincidencia	Objetivo
1	1.1	M1	Gráfico	~	O1
	1.2	M1	Gráfico	SÍ	O2
	1.3	M1	Gráfico	NO	

	1.4	M1	Gráfico	NO	
	1.5	M1	Gráfico	NO	
2	2.1	M2, M3	Numérico	SÍ	O3, O4, O5
	2.2	M2, M3	Numérico	NO	
	3.1	M2, M3	Gráfico	SÍ	
3	3.2	M2, M3	Gráfico	SÍ	O6, O7, O8
	3.3	M2, M3	Gráfico	NO	
	4.1	M3, M4	Gráfico	SÍ	O9
4	4.2	M3, M4	Gráfico	SÍ	O10
	4.3	M3, M4	Gráfico	NO	
5	5.1	M5	Gráfico	SÍ	O11
	5.2	M5	Gráfico	SÍ	O12

Fuente: Tareas didácticas de la propuesta

RESULTADOS

Lo que se espera alcanzar con la aplicación de la propuesta didáctica que se presenta en este taller es lo siguiente:

- Comprender y entender mejor el uso del software matemático GeoGebra en el proceso enseñanza-aprendizaje del concepto de límite para estudiantes de BGU. Así como dejar atrás las clases tradicionales y monótonas, adaptándose a las necesidades actuales de los estudiantes; adecuar dicho recurso tecnológico en el desarrollo de un proceso enseñanza-aprendizaje con un enfoque más dinámico, participativo y activo, logrando así captar la atención e interés de los estudiantes.
- El estudiante de BGU sea capaz de alcanzar la concepción dinámica del concepto de límite por medio de un conjunto de tareas didácticas, diseñadas a partir de una descomposición genética basada en la teoría APOE de Dubinsky. Esta teoría describe cómo el estudiante aprende nuevos conocimientos matemáticos, tomando como base el concepto de abstracción reflexiva de Piaget (Cottrill, et al., 1996). Dichas tareas didácticas fueron elaboradas en el software matemático GeoGebra y presentadas al estudiante en dos sesiones semanales a través de talleres individuales. Para tratar el concepto de límite de una función se utilizaron únicamente los sistemas de representación gráfico y numérico que resultaron ser fáciles de visualizar, analizar y comprender para la gran mayoría de los estudiantes.
- Identificar cuáles son las características idóneas y más adecuadas que debe conformar una propuesta didáctica para un correcto aprendizaje de la concepción dinámica del concepto de límite en estudiantes de BGU. Una propuesta debe estar compuesta, en primer lugar, por una revisión sobre los conocimientos previos y necesarios para la comprensión de este nuevo concepto, seguido de un análisis acerca de lo que se entiende por límite y acompañado de tareas didácticas que permitan al estudiante construir su propio conocimiento (Blázquez, et al., 2006). Todo ello con la constante guía y orientación del docente.

CONSIDERACIONES FINALES

Algunas consideraciones y aspectos que se deben tener en cuenta a la hora de aplicar la propuesta didáctica que se presenta en este taller son los siguientes:

- Es primordial mantener el enfoque dinámico y participativo que presenta esta propuesta didáctica para el proceso enseñanza-aprendizaje de la concepción dinámica del concepto de límite. Para ello, se recomienda trabajar con un número de tareas didácticas moderado; es decir, que no comprendan demasiados ejercicios ya que, a pesar de que trabaja con preguntas las cuales captan la atención e interés de los estudiantes debido a la forma en como están presentadas, una cantidad excesiva de las mismas puede resultar tedioso y un tanto pesado para los alumnos.
- Durante el desarrollo de este proyecto se pudo determinar que el concepto de límite posee una gran variedad de sistemas de representación; entre los que destacan, el verbal, el algebraico, el numérico y el gráfico. Tras llevar a cabo el proceso de investigación científica, tomando como respaldo las

afirmaciones de (Engler et al., 2007) y de (Palomino et al., 2009), junto con el proceso de recolección de información se puede afirmar que los sistemas de representación gráfico y numérico son los que resultan más comprensibles y fáciles de analizar por los estudiantes. Por esta razón se recomienda utilizar estos sistemas de representación en los ejercicios planteados para el proceso enseñanza-aprendizaje de la concepción dinámica del concepto de límite.

- El tiempo limitado de las clases no permitió abordar los conceptos teóricos tan detalladamente como se esperaba. Es por ello que se recomienda organizar mejor el tiempo del que se dispone para el desarrollo de la clase, con el fin de preparar correctamente a los estudiantes en el proceso de aplicación de ejercicios y tareas propuestas por el docente. Además, es importante hacer un mayor énfasis al finalizar cada una de las tareas, realizando preguntas de reflexión que invitan al estudiante a pensar detenidamente sobre los ejercicios resueltos, evitando así que respondan de manera mecánica.

REFERENCIAS

- Blázquez, S., Ortega, T., Gatica, S. N., & Benegas, J. (2006). Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático en la universidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9(2), 189-209.
- Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Shwingendorf, K., Thomas, K., & Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process scheme. *Journal of Mathematical Behavior*, 15(2), 167-92.
- Engler, A., Vrancken, S., Hceklein, M., Müller, D., & Gregorini, M. (2007). Análisis de una propuesta didáctica para la enseñanza de límite finito de variable finita. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 11, 113-132.
- Palomino, J., C.; Hurtado, J. & Barrios, E. (2009). *Dificultades en los procesos de enseñanza-aprendizaje del concepto de límite y su relación con los sistemas de representación*. Encuentro Internacional de Matemáticas - EIMAT (18-21 Aug 2009). Barranquilla, Colombia.
- Socas, M. (2007). *Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico*. XI Simposio de la SEIEM.
- Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación Matemática*, 17(1), 5-31.
- Vrancken, S., Gregorini, M., Engler, A., Müller, D., & Hecklein, M. (2006). Dificultades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite. *PREMISA*, 8(29), 9-19.