

Estudio de la función cuadrática, que involucran parámetros, con el apoyo del GeoGebra

Study of the quadratic function, involving parameters, with the support of GeoGebra

Nancy Edith Saravia Molina ^{1, a}
María Iris Flores Quesquén ³

Verónica Neira Fernández ^{2, b}

¹ Investigación sobre Enseñanza de la Matemáticas, IREM-PUCP, Perú

^a <https://orcid.org/0000-0002-2819-8835>

nsaraviam@pucp.edu.pe

² Investigación sobre Enseñanza de la Matemáticas, IREM-PUCP, Perú

^b <https://orcid.org/0000-0002-2540-3530>

vneira@pucp.pe

³ Investigación sobre Enseñanza de la Matemáticas, IREM-PUCP, Perú

iris.flores@pucp.edu.pe

Información

Recibido: 14/03/2021.

Aceptado: 10/05/2021.

Palabras clave:

Funciones cuadráticas,
parámetros, registros,
GeoGebra.

Information

Keywords:

Quadratic functions,
parameters, registers,
GeoGebra.

Resumen

En este taller compartiremos una propuesta para la enseñanza de funciones cuadráticas cuyas reglas de correspondencia contienen parámetros en su expresión matemática y ciertas condiciones que debe cumplir su rango. Usaremos el GeoGebra como una herramienta de apoyo para la validación de los valores para el parámetro obtenidos en el proceso algebraico. Este taller tiene dos finalidades, el primero es proponer problemas con contexto en los que las soluciones involucran número reales y, el segundo, es presentar a los docentes las potencialidades del GeoGebra para validar procesos algebraicos. Asimismo, nos interesa generar un espacio para discutir sobre las ventajas y desventajas que ofrecen las herramientas del GeoGebra en la verificación de resultados obtenidos de manera algebraica y reflexionar sobre su incorporación en nuestras clases. En cuanto al análisis didáctico, se toman aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica. En relación a la metodología, ésta es cualitativa. Finalmente, se evidencia la necesidad de utilizar diferentes representaciones y se señala la pertinencia del uso del GeoGebra que favorece el aprendizaje y la enseñanza.

Abstract

In this workshop we will share a proposal for teaching quadratic functions whose correspondence rules contain parameters in their mathematical expression and certain conditions that their range must fulfill. We will use GeoGebra as a support tool for the validation of the parameter values obtained in the algebraic process. This workshop has two purposes, the first is to propose problems with context in which the solutions involve real numbers, and the second is to present to teachers the potential of GeoGebra to validate algebraic processes. Likewise, we are interested in generating a space to discuss the advantages and disadvantages offered by GeoGebra tools in the verification of results obtained algebraically and to reflect on its incorporation in our classes. As for the didactic analysis, aspects of the Theory of Semiotic Representation Registers are taken. In relation to the methodology, it is qualitative. Finally, the need to use different representations is evidenced and the pertinence of the use of GeoGebra, which favors learning and teaching.

INTRODUCCIÓN

La función cuadrática es una noción que se enseña en el nivel secundario de la Educación Básica Regular (EBR) y en el nivel superior, tanto para carreras de Humanidades como para carreras de Ingeniería.

Cuando se enseña el tema, se hace usando problemas en contexto que suelen presentar soluciones en los números enteros, o se fuerzan situaciones para que las soluciones sigan siendo enteros, pero ¿por qué se tiende a presentar problemas solo con soluciones en los números enteros? ¿por qué no se usan parámetros en las funciones cuadráticas para analizar las posibles respuestas? Sabemos que en la vida real los resultados que se obtienen de modelar la realidad con algún modelo matemático no siempre son números enteros, sino que muchas veces son racionales e irracionales.

Es por ello que el taller que presentamos tiene por finalidad proponer problemas con contexto en los que las soluciones involucran número reales y, presentar a los docentes las potencialidades del GeoGebra para validar procesos y resultados algebraicos. Se presenta en el artículo aspectos del curso Fundamentos de Cálculo dirigido a estudiantes de Ingeniería, quienes desarrollaron las tareas usando lápiz y papel. Vamos a presentar una propuesta de problemas que se pueden usar para enseñar funciones cuadráticas, que involucran parámetros, y usaremos el software GeoGebra para validar las respuestas.

Existe una preocupación, por parte de los investigadores, sobre la enseñanza y aprendizaje de las funciones cuadráticas tales como las de Surichaqui (2018), Ruiz et al. (2016), Salazar (2015) y Gómez (2011) que indican que el uso de recursos tecnológicos (Ambientes de Representación Dinámica-ARD, Software con herramientas CAS, calculadoras científicas, entre otras) son utilizados como medios para realizar tratamientos en las representaciones gráficas de diferentes objetos matemáticos. Por ejemplo, las investigaciones de Gómez (2004, 2005) y Calderón-Zambrano, Franco-Pesantez y Alvarado-Espinoza (2018) muestran que el uso de las calculadoras y el software libre GeoGebra, en el proceso de enseñanza – aprendizaje, no se utilizan sólo como herramientas de cálculo o para realizar gráficos, sino también como un medio para movilizar conocimientos matemáticos y suscriben que, para ello, los docentes deben conocer las bondades que nos brindan las tecnologías y además, deben organizar su clase de tal manera que sepan cómo y cuándo deben incorporarlas. En estos tiempos, la tecnología debe ser usada como un recurso didáctico, es otra de las herramientas didácticas que un docente de matemáticas puede utilizar en sus clases con previa planificación didáctica.

Es importante aclarar que el uso de la tecnología digital (GeoGebra) es con la finalidad de favorecer la movilización del concepto función cuadrática y de validar resultados algebraicos. Se considera necesario incorporar progresivamente este software libre del GeoGebra, debido a que sus interfaces, tales como: vista gráfica, algebraica y hojas de cálculo, permite la percepción de los diferentes registros de representaciones semióticas de la función cuadrática, en línea mediante el uso de código QR, es decir, que los gráficos y otros elementos se pueden visualizar en las pantallas de los teléfonos inteligentes o tabletas.

En ese sentido, se afirma que la tecnología puede simplificar procesos algorítmicos o técnicos y dirigir la atención en la exploración, manipulación, contraste e interpretación de los resultados de cálculo, con lo que es posible realizar conjeturas de las propiedades y/o conceptos matemáticos involucrados en la tarea; es decir, permite centrar la atención en el análisis de la solución del problema desarrollado.

ENFOQUE TEÓRICO

Muchos objetos matemáticos pueden ser representados usando registros de representación semiótica. En el taller nos apoyaremos en algunos aspectos de la Teoría de Registro de Representación Semiótica de Duval (2004).

El autor, aclara que un objeto matemático no es factible de ser manipulado directamente sino a través de sus representaciones, las cuales pertenecen a registros de representación semiótica. Según el autor, dichos registros son: Lenguaje natural, figural, algebraico y gráfico. En nuestro caso, no usaremos el registro figural.

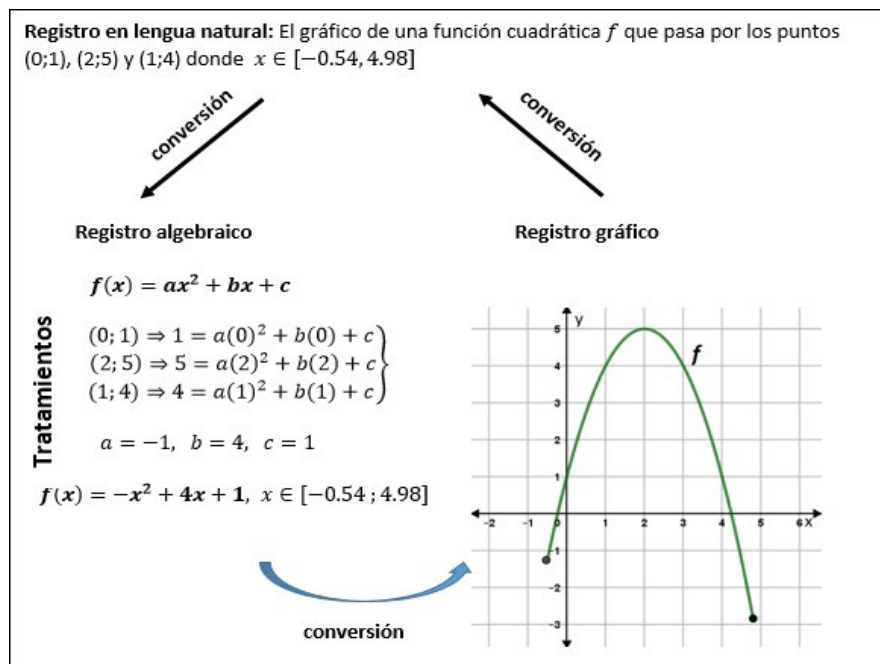
De acuerdo con Duval (1995), para que el aprendizaje de un objeto matemático exista, necesariamente el sujeto debe realizar la conversión de la representación de dicho objeto, como mínimo, en dos registros de representación semiótica distintos. Es en este salto cognitivo donde el sujeto articula las distintas aprehensiones de la representación en un registro, movilizando nociones y conocimientos previos mediante el planteamiento de estrategias que permitan dar solución a la situación, lo cual evidencia, según el autor, el aprendizaje del objeto matemático. En este artículo, se toman los aportes de Bejarano

(2018) en cuanto a las aprehensiones en el Registro Gráfico Dinámico (RGD) ya que, el autor, solo ha trabajado las aprehensiones perceptiva, secuencial, operatoria y discursiva en el registro figural. Según el autor, las diferentes transformaciones que se realizan en una representación dentro de un mismo registro se denominan tratamientos, y al cambiar la representación de un registro de representación a otro distinto se denomina conversión.

Por ejemplo, la figura 1 muestra los registros de representación semiótica de la función cuadrática, así como las conversiones entre sus representaciones y los tratamientos en el registro algebraico.

Figura 1

Tratamientos y conversiones en las representaciones de la función cuadrática



Nota. Adaptado de Duval (2004, p.146)

En la figura 1 se observa que, en la representación en lenguaje natural, se presenta información sobre tres puntos de paso de la representación de la función cuadrática f y su respectivo dominio. Luego se produce una conversión, del registro de lengua natural al registro algebraico, pues con los tres puntos proporcionados se plantea un modelo matemático que representa a dicha función con constantes desconocidas, donde, por medio de tratamientos de los datos y las leyes del Álgebra, se determinan los valores de las constantes. Dada la representación algebraica de f , por medios tecnológicos (lápiz y papel, software graficador, calculadoras, entre otros), es factible hacer una conversión, del registro algebraico al registro gráfico, para representarla gráficamente y de la representación gráfica resultante puede identificarse los puntos de paso, dando a este proceso un comportamiento cíclico, el cual también puede ser realizado en forma inversa (registro gráfico \rightarrow registro algebraico \rightarrow registro en lengua natural).

La representación de f en el registro gráfico, mostrado en la figura 1, ha sido realizada mediante el software libre GeoGebra. Como se observa, están representados los ejes X e Y , y puede usarse la vista geométrica para realizarla, primero se ingresa la regla de correspondencia en el registro algebraico y luego el GeoGebra nos presenta el registro gráfico.

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DEL TALLER

Las actividades que proponemos en este taller buscan proponer problemas con contexto y problemas sin contexto, en los que las soluciones involucran número reales y, además, se quiere presentar las potencialidades del GeoGebra para validar procesos algebraicos. Asimismo, nos interesa generar un espacio para discutir sobre las ventajas y desventajas que ofrecen las herramientas del GeoGebra en la verificación de resultados obtenidos de manera algebraica y reflexionar sobre su incorporación en

nuestras clases. Este taller estará dirigido a docentes del nivel secundario y superior, a quienes se les presentará una actividad que contiene problemas con y sin contexto, que involucran a la función cuadrática, cuyas soluciones involucran número reales y, además, se usarán el GeoGebra para validar sus procesos algebraicos y dar respuesta a lo planteado.

El taller se desarrollará en una sesión de 90 minutos, tiene como requisito previo que los participantes tengan instalado el *GeoGebra* en su computadora, para poder desarrollar las actividades propuestas. En un inicio, la actividad será desarrollada por los docentes de manera individual y luego se realizará una discusión con todos los participantes para intercambiar ideas, estrategias de solución y diversos modos de validación las respuestas obtenidas.

A partir de los problemas mostrados, se le pide al docente que identifique los elementos y condiciones que se encuentran inmersas en dicha situación. Luego, se le pide que identifique cuáles podrían ser las posibles nociones matemáticas que estarían vinculadas a ésta (función cuadrática, ecuaciones cuadráticas, propiedades, etc.), así como, los procesos cognitivos que el estudiante podría desarrollar a partir de las consignas dadas. Luego de avanzar con el desarrollo de la actividad usando lápiz y papel, se usará el GeoGebra para analizar soluciones y resultados algebraicos.

El taller se desarrollará en tres momentos. Un primer momento, estará destinado a que los participantes exploren el GeoGebra, sobre todo las interfaces que son necesarios para el desarrollo de la actividad y, durará 10 minutos. Un segundo momento, será destinado al desarrollo de la Actividad 1, se socializarán las soluciones presentadas por los participantes y discutiremos propiedades de la función cuadrática; además, en el GeoGebra se colocará las reglas de correspondencia de la función cuadrática usando el registro algebraico (vista algebraica) para luego visualizarla en el registro gráfico (vista gráfica); este momento durará 20 minutos. El tercer momento está destinado al desarrollo de la Actividad 2, en la cual se socializarán y discutirán los resultados obtenidos, los planteamientos hechos, si los resultados hallados son correctos o no y se usará el GeoGebra para verificar dichos resultados; este momento se desarrollará en 45 minutos.

A continuación, se muestran dos ejemplos de los problemas que serán trabajados en el taller.

Figura 2. Problema C presentado en la Actividad 1 del taller

Problema C:

El largo de un rectángulo mide $(x - (\frac{-a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}))$ metros y el ancho mide $(x - (\frac{-a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}))$ metros, donde \mathbb{R} .

Con la información anterior, responda

- ¿Cómo podemos expresar el área del rectángulo?
- ¿Qué valores debe tomar a , para que exista la función área? ¿Alguna idea?

Figura 3. Problema D presentado en la Actividad 2 del taller

Ejemplo D:

Dada la función f definida por

$$f(x) = (\alpha + 3)x^2 - 5\alpha x + 2, x \in \mathbb{R}.$$

donde α es una constante.

- a) Halle todos los valores reales de α tales que $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- b) Halle todos los valores de " α ", enteros y menores que 2, de tales que $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Actividad 1: Resolución de problemas con contexto

- a) Se presentan tres problemas con contexto los cuales se pueden modelar con una función cuadrática.
- b) Definen variables
- c) Determinan el modelo que les va a permitir modelar el contexto
- d) Resuelven usando el registro algebraico.
- e) Análisis de resultados matemáticos en el contexto.
- f) Respuesta al problema.

Preguntas que guiarán la discusión:

- P1) ¿Qué hizo para resolver el problema?
- P2) ¿Por qué eligió una función cuadrática?
- P3) ¿Todas las respuestas que obtuvo al resolver las ecuaciones cuadráticas son respuestas del problema?
- P4) ¿Qué competencias matemáticas podría desarrollar un estudiante a través de esta actividad?

Actividad 2: Aprendizaje con apoyo del GeoGebra

- a) Se presentan tres problemas, sin contexto, que representan funciones cuadráticas en el registro algebraico y que, además, involucran parámetros.
- b) Se presentan algunas interrogantes para ser desarrolladas.
- c) Pueden realizar tratamientos en el registro algebraico para determinar la solución del problema.
- d) Apoyarse en el GeoGebra para tener una representación gráfica del problema y al realizar aprehensiones en el registro gráfico, se puede verificar si los resultados obtenidos a partir de los cálculos algebraicos son correctos.

Preguntas que guiarán la discusión:

- P1) ¿Qué hizo para resolver el problema?
- P2) ¿En qué propiedades se basa para resolver el problema?
- P3) ¿Le ayudó apoyarse en el GeoGebra para identificar las propiedades que analizó de manera algebraica?
- P4) ¿Los resultados coinciden?
- P5) ¿Qué opina del uso del parámetro?
- P6) ¿Qué competencias matemáticas podría desarrollar un estudiante?

P7) ¿Qué conceptos matemáticos uso para resolver esta actividad?

P8) ¿Qué capacidades matemáticas podría desarrollar un estudiante a través de esta actividad?

RESULTADOS ESPERADOS

Sabemos que en la enseñanza de la matemática se privilegia el uso del registro algebraico, es por ello, que en este taller se busca usar otros registros para generar aprendizaje.

En la Actividad 1, esperamos que los participantes logren hacer tratamientos en el registro de lengua natural al identificar los datos del problema; luego hagan la conversión al registro algebraico y en este registro, realicen tratamientos para poder simplificar o reducir los términos algebraicos y lleguen a un resultado.

En la Actividad 2, esperamos que los participantes apliquen los conocimientos básicos de función cuadrática como son definición, el discriminante asociado a la función cuadrática y otros, que nos lleven a un análisis o planteamiento de alguna ecuación o inecuación que permitan obtener el valor del parámetro.

También se espera que estas propuestas de solución puedan ser aplicados a situaciones o modelos contextualizados.

CONSIDERACIONES FINALES

La implementación del uso del GeoGebra en los procesos de enseñanza-aprendizaje de la matemática, hoy en día, es de mucha ayuda ya que nos permite trabajar la representación de un objeto matemático en diferentes registros y ello, en sentido de Duval (2004), genera aprendizaje. Los docentes debemos estar conscientes de los beneficios y limitaciones del software si es que deseamos incorporarlo en la enseñanza de la matemática. No solo nos ayuda a comprobar resultados sino también a realizar análisis mediante las aprehensiones en el registro gráfico.

Por último, creemos que es importante generar espacio para reflexionar sobre la incorporación del *GeoGebra* en nuestras clases, de modo que el aprendizaje de nuestros estudiantes se vea favorecido.

REFERENCIAS

- Bejarano, V. (2018). Articulación de las aprehensiones en la noción del límite en un punto de una función real de variable real en estudiantes de Ingeniería. Recuperado de <http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/20.500.12404/12075>
- Calderón-Zambrano, R; Franco-Pesantez, F. y Alvarado Espinoza, T. (01 de agosto del 2018). Logros de aprendizaje en funciones lineales y cuadráticas mediante secuencia didáctica con el apoyo del Geogebra. *Polo de Conocimiento*, 3 (22), 449-470.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang.
- Duval, R. (2012). Registro de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. *Revista Electrónica de Educación Matemática*, 7(2), 266-297. Doi: <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p266>
- Duval, R. (2004). *Semiosis y Pensamiento Humano. Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales*. Universidad del Valle, Colombia.
- Duval, R. (2012). *Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento*. (M. Thadeu, Trad.) Florianópolis, Brasil.
- Gómez, P. (2005). *Complejidad de las matemáticas escolares y diseño de actividades de enseñanza y aprendizaje con tecnología*. *Revista EMA. Investigación e innovación en Educación matemática*, 10(2 y 3), 354-374.
- Gómez, P. (2004). *Análisis didáctico y uso de tecnología en el aula de matemáticas*. En Peñas, M.; Moreno, A.; Lupiáñez, J. L. (Eds.), *Investigación en el aula de matemáticas: tecnologías*

- de la información y la comunicación* (pp. 73-95). Granada: SAEM Thales y Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.
- Gómez, F. (2011). *Implementación de una propuesta de una unidad didáctica interactiva mediada en las nuevas tecnologías para propiciar el aprendizaje de la función cuadrática en el grado noveno del Colegio Calasanz*. Tesis de maestría. Universidad Nacional de Colombia, sede Medellín.
- Peñaloza, T. N. y Salazar, J.V.F. (2018). Aprehensiones y modificaciones en el registro gráfico dinámico del paraboloides elíptico. *Educação Matemática Pesquisa*, 20 (1), 61-83. Recuperado de: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/34170/pdf>
- Ruiz, O., Flores, S., Luna, J., González, M., Salazar, M., Cruz, M., Ramírez, O. (2016). Uso de tecnología para la diferenciación a través del concepto de variación. Parte I. *Revista Orientación Educativa*, 30(57), 83-94.
- Salazar, J.V.F. (2015). Génesis Instrumental: el caso de la función cuadrática. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática, UNION*, 1 (41), 57-67. Recuperado de: <http://www.fisem.org/www/union/revistas/2015/41/Artigo3.pdf>
- Surichaqui, F. (2018). *Aplicación del software GeoGebra en el aprendizaje de las funciones cuadráticas en los estudiantes del primer ciclo de la universidad para el desarrollo andino*. Tesis de maestría. Universidad Nacional Hermilio Valdizán, Huánuco, Perú.