

## Creación de problemas para el estudio del álgebra y composición de funciones utilizando aplicativos

## Creation of problems for the study of algebra and composition of functions using software.

Maritza Luna Valenzuela<sup>1, a</sup>

Elton John Barrantes Requejo<sup>2, b</sup>

Marco Gregorio Solórzano Mamani<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Investigación sobre Enseñanza de la Matemáticas, IREM-PUCP, Perú

<sup>a</sup> <https://orcid.org/0000-0002-3039-451X>

[luna.m@pucp.edu.pe](mailto:luna.m@pucp.edu.pe)

<sup>2</sup> Investigación sobre Enseñanza de la Matemáticas, IREM-PUCP, Perú

<sup>b</sup> <https://orcid.org/0000-0002-2668-9032>

[ejbarran@pucp.edu.pe](mailto:ejbarran@pucp.edu.pe)

<sup>3</sup> Investigación sobre Enseñanza de la Matemáticas, IREM-PUCP, Perú

[marco.solorzano@pucp.edu.pe](mailto:marco.solorzano@pucp.edu.pe)

### Información

Recibido: 14/03/2021.

Acceptado: 10/05/2021.

### Palabras clave:

Creación de problemas, álgebra y composición de funciones, aplicativos, GeoGebra.

### Information

### Keywords:

Problem creation, algebra and composition of functions, GeoGebra.

### Resumen

El objetivo principal de este taller es la creación de problemas sobre el álgebra y la composición de funciones, para lo cual se crearán aplicativos utilizando el software GeoGebra. Se busca motivar la capacidad de evaluar críticamente la calidad de una actividad matemática en torno a la solución de un problema y tener la capacidad de modificarlo para conseguir actividades matemáticas enriquecedoras. Para lograr dicho propósito, se aplicará la estrategia de creación de problemas por variación, que consiste en presentar a los participantes un problema, en el marco de un episodio muy concreto, en la clase de un profesor, dicho episodio describe brevemente algunas reacciones de sus alumnos al resolver el problema. Luego de una secuencia de actividades los participantes deberán crear y resolver problemas, finalmente, socializarán de manera sincrónica sobre su experiencia en el taller.

### Abstract

The objective of this workshop is the creation of problems about algebra and the composition of functions, for which will be created using GeoGebra software. The aim is to motivate the ability to critically evaluate the quality of a mathematical activity around the solution of a problem and to have the ability to modify it in order to achieve enriching mathematical activities. To achieve this purpose, the strategy of problem creation by variation will be applied, which consists of presenting the participants with a problem, in the framework of a very concrete episode, in a teacher's class, this episode briefly describes some of the reactions of his students when solving the problem. After a sequence of activities, the participants will create and solve problems, and finally, they will socialize synchronously about their experience in the workshop.

## INTRODUCCIÓN

La creación de problemas de matemáticas es un proceso mediante el cual se obtiene un nuevo problema, el cual está directamente vinculado a la resolución de problemas y a la indagación; además, constituye en ser un estímulo del pensamiento matemático de estudiantes y profesores; más aún, contribuye a desarrollar competencias didácticas de los profesores (Malaspina 2015, 2017, 2020).

La creación de problemas en los últimos años atrae la atención de diversos investigadores como Singer, Ellerton y Cai (2015), Felmer, Pehkonen y Kilpatrick (2016), entre otros debido a que motiva promover el aprendizaje, el desarrollo del pensamiento matemático y el estímulo de la creatividad en profesores y estudiantes. Además, el uso de la tecnología puede llegar a ser una poderosa herramienta para que los estudiantes y profesores logren crear diferentes representaciones gráficas y sirve como un medio para que formulen sus propias preguntas o problemas, lo que constituye un importante aspecto en el aprendizaje de las matemáticas (Barrera & Santos, 2001). Por lo cual, el conocimiento de algunos procesos o aplicativos podrán contribuir como mediador en el proceso de enseñanza y aprendizaje de álgebra de funciones y en particular de la composición de funciones.

El álgebra de funciones y sobre todo la composición de funciones son estudiadas en el último año de la secundaria y en los primeros semestres de nivel universitario, que luego será utilizado en el cálculo diferencial e integral, donde surgen dificultades por la no identificación del dominio y en particular de la composición de funciones.

Este taller presenta una primera situación donde un profesor de matemáticas del primer semestre de una universidad peruana plantea un problema a sus alumnos y luego de pedir la solución muestra la resolución de dos de sus alumnos. Esta situación presentada a los participantes busca motivar la exploración de herramientas tecnológicas para ayudar en la resolución, visualización de gráficas y construcción de aplicativos. Se presenta una segunda situación y se pide la resolución, para luego solicitar la creación de problemas que pueden ser problemas *pre* o *pos*.

### Marco teórico

El presente taller está dirigido a profesores de matemática del nivel medio superior con conocimientos de GeoGebra a nivel intermedio. Para su desarrollo se considera aspectos relacionados a la Situación, Problema, Reflexión didáctica, Problema pre o pos (SPRP) de creación de problemas, de modo que se logró fortalecer la articulación entre competencias y conocimientos del profesor de matemáticas propuesta por Malaspina (2017). En particular, se considerará la creación de problemas por variación, es decir dada una situación, en el marco de un episodio muy concreto, en la clase de un profesor, dicho episodio describe brevemente algunas reacciones de sus alumnos al resolver el problema. A partir de dicho episodio se solicita a los participantes la creación de nuevos problemas. Para nuestro propósito, adaptamos la estrategia de SPRP siguiendo las siguientes etapas: (1) presentar a los participantes una situación (Actividad 1) para crear problemas, (2) pedir a los participantes del taller, individualmente, crear y resolver un problema a partir de la situación dada (denominaremos a este problema como PG), (3) pedir a los participantes elaboren una configuración cognitiva de la solución del problema creado, (4) socializar y discutir los problemas creados y sus configuraciones asociadas, (5) solicitar a los participantes que creen un nuevo problema relacionado con su PG (se le denominará NPG). Puede ser un Problema-pre, en el sentido de contribuir a comprender mejor y a resolver correctamente PG; o un Problema-pos, en el sentido de ser más retador que PG, que requiera mayor demanda cognitiva que PG. Algunos participantes deberán explicitar si creó un problema-pre o un problema-pos respecto a su PG. (6) Redactar una solución del problema creado (NPG). (7) Presentar de manera sincrónica el problema creado.

Para describir algunos objetos matemáticos que intervienen en la creación de problemas como producto de una actividad matemática se harán uso de constructos del Enfoque Ontosemiótico (EOS). Además, se tendrá presente la propuesta Malaspina (2017) para explicitar los cuatro elementos básicos de un problema matemático, es decir, la información, el requerimiento, el contexto (intramatemático o extramatemático) y el entorno matemático.

## MATERIAL Y MÉTODOS

Este taller se divide en dos momentos, con una duración de 45 minutos cada uno. En la primera parte, se presenta una actividad para explorar e instrumentar la creación de problemas. En la segunda parte, se propone la creación de problemas por elaboración a partir de una situación dada.

Para el desarrollo de las actividades propuestas se tiene que tener conocimiento de la definición de función, dominio y rango, algebra de funciones y la composición de funciones (Stewart, 2008) dada a continuación:

**Definición.** Sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos diferentes del vacío. Una función  $f$ , de  $A$  en  $B$ , es una regla de correspondencia que asigna a cada elemento  $x$ , de un conjunto  $A$ , un único elemento  $y$  de un conjunto

$B$ , denotado por  $y = f(x)$ . Se simboliza mediante:

$$f: A \rightarrow B$$

$$x \mapsto y = f(x)$$

**Función real de variable real.** Se dice que una función es real de variable real cuando tanto su dominio como su rango son subconjuntos de los números reales.

**Dominio y rango de una función.** Sea  $f: A \rightarrow B$ , con  $A, B \subseteq \mathbb{R}$ , una función. Al conjunto  $A$  se le llama dominio de  $f$  y se representa por  $Dom(f)$ . Al subconjunto de  $B$  formado por las imágenes de cada uno de los elementos de  $A$ , se denomina rango de  $f$  y se denota por  $Ran(f)$ . Es decir:

$$Dom(f) = \{x \in A: y = f(x)\} \text{ y } Ran(f) = \{f(x) \in B: x \in A\}$$

**Gráfica de una función.** Si  $f$  es una función con dominio  $A$ , entonces la gráfica de  $f$  es el conjunto de pares ordenados

$$Gr(f) = \{(x; f(x)): x \in A\}$$

**Álgebra de Funciones.** Sean  $f$  y  $g$  funciones con dominios  $A \subset \mathbb{R}$  y  $B \subset \mathbb{R}$ . Se definen las siguientes operaciones entre funciones:

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x), \quad Dom(f + g) = Dom(f) \cap Dom(g) = A$$

$$\cap B \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \quad Dom(f \cdot g) = Dom(f) \cap Dom(g) = A$$

$$\cap B$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad Dom\left(\frac{f}{g}\right) = Dom(f) \cap Dom(g) - \{x \in B: g(x) = 0\}$$

$$= A \cap B - \{x \in B: g(x) = 0\}$$

**Composición de funciones.** Sean  $f$  y  $g$  funciones, la función compuesta  $f \circ g$  (también llamada la composición de  $f$  y  $g$ ), está definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

El dominio de  $f \circ g$  es

$$Dom(f \circ g) = \{x \in Dom(g): g(x) \in Dom(f)\}$$

Para el desarrollo de las actividades se les envía mediante chat de la plataforma UNTUMBES el link del classroom para poder interactuar sincrónicamente con los participantes.

**Actividad 1. Se presenta la siguiente situación a los participantes:** El profesor John solicita a sus alumnos que resuelvan el siguiente un ejercicio:

La función  $f$  es definida

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 4ax + 1, & -3 \leq x < 0 \\ 2a - \sqrt{2ax - x^2}, & 0 \leq x < a' \end{cases}$$

Donde  $a$  es una constante positiva.

- Esboce la gráfica de  $f$  cuando  $a = 2$ .
- Encuentre el conjunto de valores de  $a$  para los cuales el rango de  $f$  es un

## RESULTADOS

A continuación, presentamos la solución de dos alumnos:

El alumno A1 escribe lo siguientes:

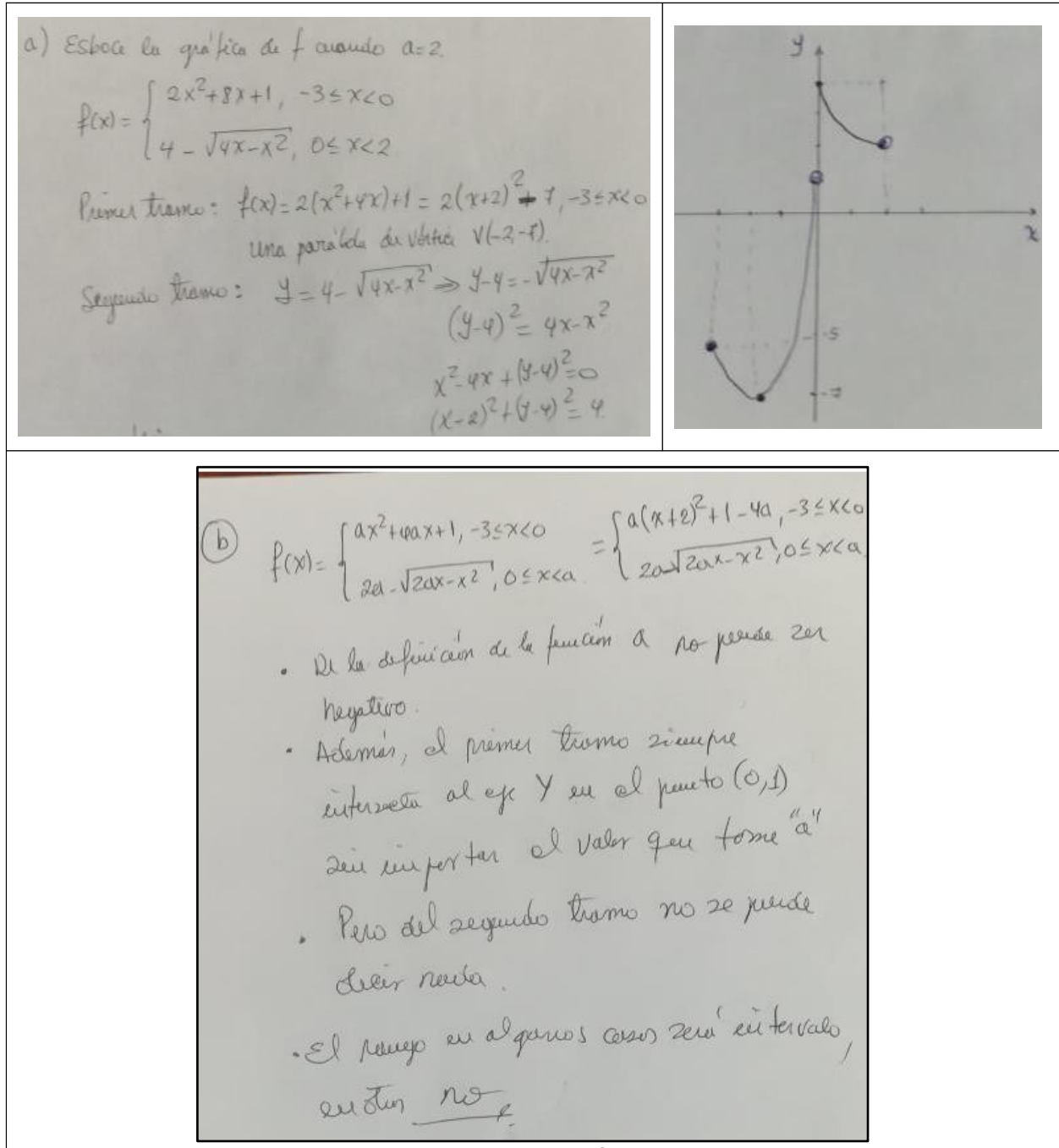


Figura 1. Gráfica de la función  $f$  por el alumno A1

Mientras que el alumno A2 escribe la solución de la parte a) como se muestra en la Figura que sigue:

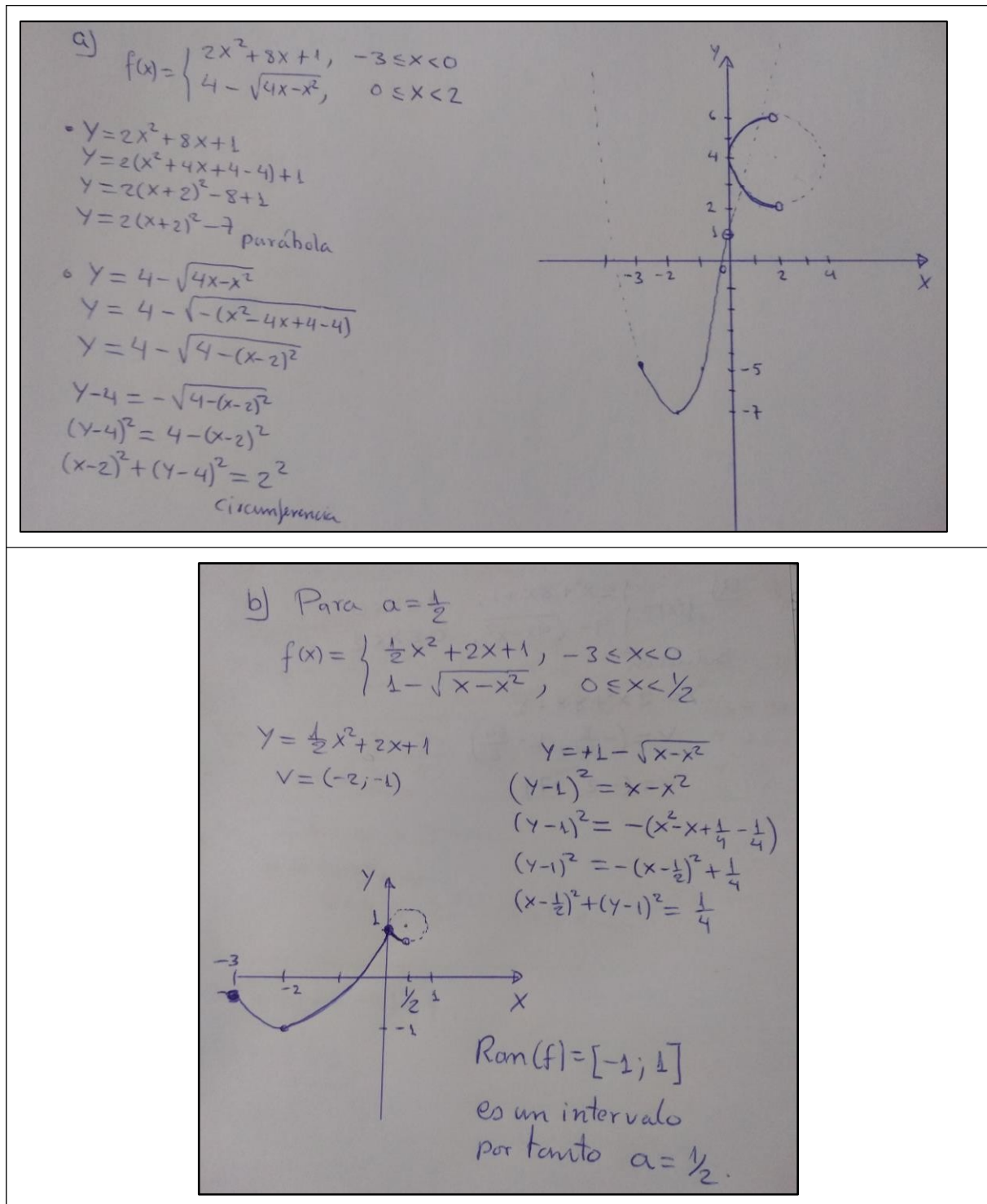


Figura 2. Gráfica de la función  $f$  por el alumno A2

Se solicita a los participantes:

- Verifiquen si alguna de las soluciones es correcta y de no ser así ellos deberán dar en la solución correcta.
- Grabar en el link de classroom que se indicara durante el taller.
- Compartir en el plenario con todos los participantes su solución.

El hecho que no se llegue a resolver el ejercicio o surjan con dudas en la respuesta permite iniciar el taller con el apoyo del software GeoGebra.

En esta actividad la parte a) se usará para la exploración con las herramientas del GeoGebra respecto ingresar funciones seccionadas y su representación gráfica. Mientras que la parte b) que requiere el uso de la herramienta de deslizadores del GeoGebra, así poder generar el comportamiento de la gráfica de funciones cuando presentan parámetros, en este caso “ $a$ ”. Asimismo, en esta parte se aprovechará para introducir la creación de aplicativos.

Siguiendo los procesos explicados en este taller se espera que los participantes resuelvan el ejercicio presentado por el profesor John y obtener el resultado se muestra a continuación:

a) Cuando  $a = 2$ , la función es de la forma

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 8x + 1, & -3 \leq x < 0 \\ 4 - \sqrt{4x - x^2}, & 0 \leq x < 2 \end{cases}$$

Su gráfica se muestra en la figura 1 es:

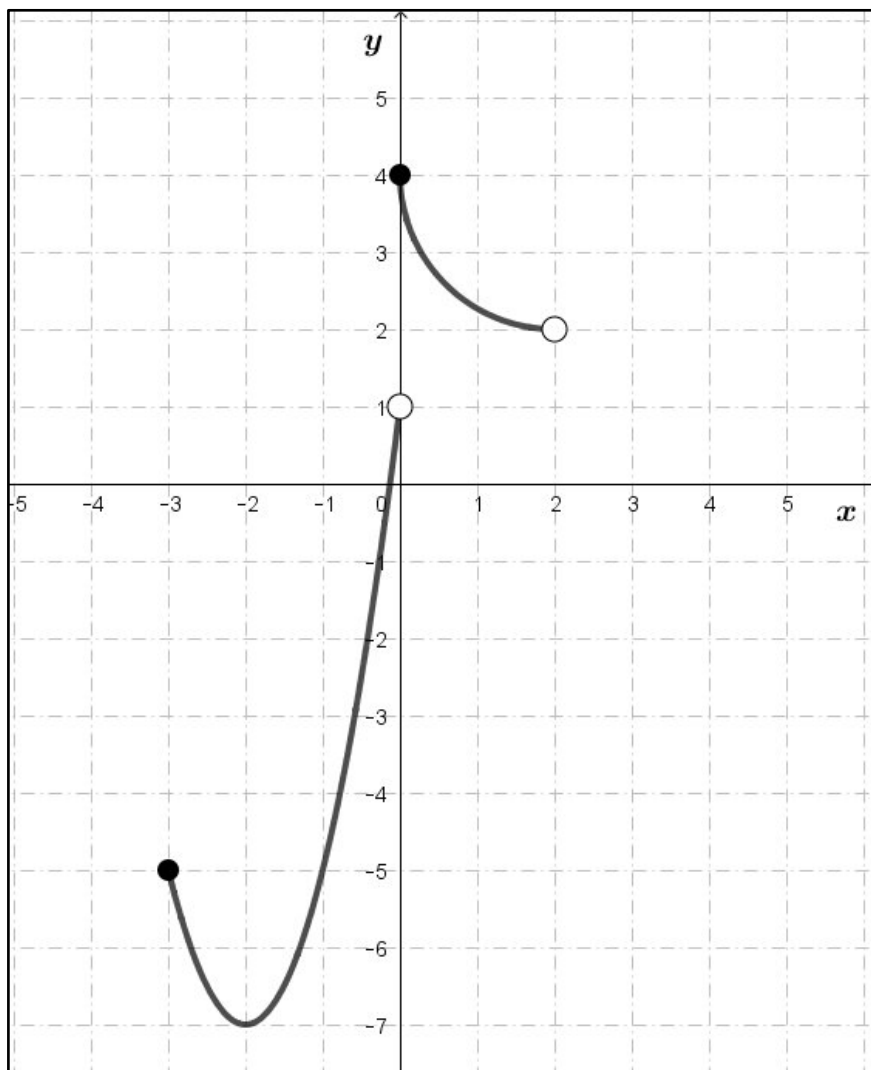
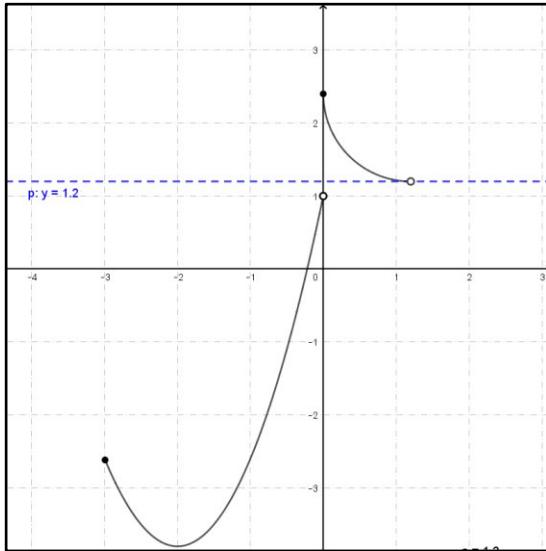
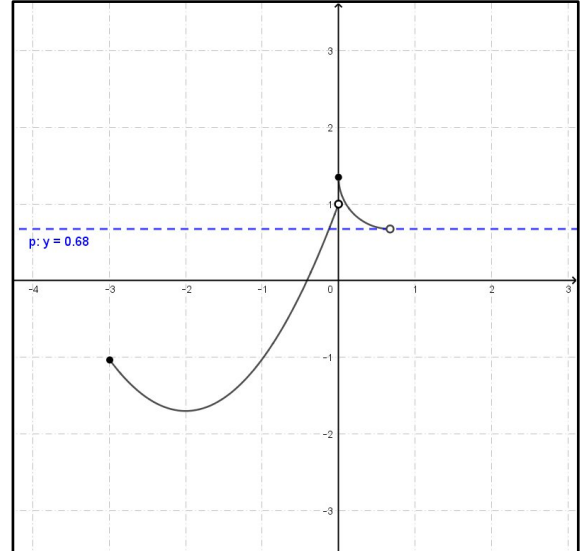


Figura 3. Gráfica de la función  $f$

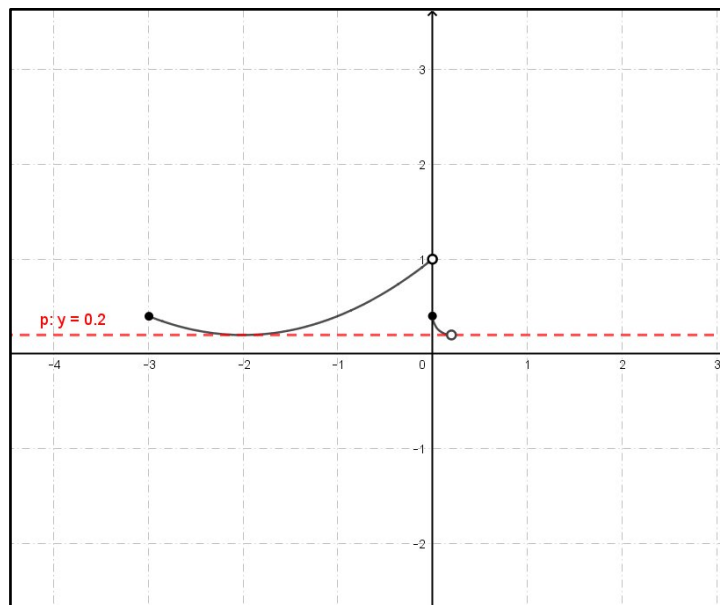
b) Para dar solución se debe analizar el comportamiento de las distintas gráficas y parte de las construcciones se muestran en las Figuras 2, 3 y 4.



**Figura 4.** Gráfica de la función  $f$



**Figura 5.** Gráfica de la función  $f$



**Figura 6.** Gráfica de la función  $f$

Luego de un análisis en conjunto con todos los participantes se obtendrá el parámetro  $a \in \left[\frac{1}{5}, 1\right]$ .

Seguidamente se presenta la actividad 2, la que está orientada a motivar la creación de problemas.

**Actividad 2.** Sean las funciones

$$f(x) = x + 1, \quad 0 \leq x < 3$$

$$g(x) = x^2 + 1, \quad k^2 - 1 \leq x < k$$

Se solicita que responda lo siguientes:

- a) Halle los valores de  $k$  para que  $f-g$  exista.

- b) Determine los valores de  $k$  para que  $f \circ g$  exista.
- c) Se solicita que resuelvan el problema.
- d) Se solicitan que creen un problema que puede ser Pos o Pre.
- e) Grabar en el classroom que se indicara durante el taller.
- f) Compartir en el plenario con todos los participantes el problema creado y su solución.

## DISCUSIÓN

Esperamos que los participantes se habitúen con la creación de aplicativos y logren crear nuevos problemas incorporando herramientas tecnológicas, como es el caso del GeoGebra, ya que pudieron experimentar las bondades y potencialidades de este software para así lograr el desarrollo de la creatividad, el razonamiento lógico y la validación de conjeturas.

Por medio de esta propuesta consideramos relevante la creación de problemas por parte de los profesores, ya que se pretende que motivar el desarrollo de habilidades matemáticas como por ejemplo la exploración, el descubrimiento, la elaboración, refutación y validación de conjeturas, para el mejor desempeño docente.

## REFERENCIAS

- Barrera, F. & Santos, M. (2001). Students' use and understanding of different mathematical representations oftasksin problemsolving instruction. *Proceedings of the Twenty-Three Annual Meeting North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol. 1, pp. 459-466. ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.
- Felmer, P., Pehkonen, E. & Kilpatrick, J. (Eds.) (2016). *Posing and Solving Mathematical Problems: Advances and New Perspectives*. Springer.
- Malaspina, U. (2017). La creación de problemas como medio para potenciar la articulación de competencias y conocimientos del profesor de matemáticas. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en, [enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html](http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html)
- Malaspina, U. (2020). Indagar, crear y resolver Problemas de Matemáticas. *X Congreso Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas. Actas de congreso*, 82-90
- Malaspina, U., Mallart, A. & Font, V. (2015). Development of teachers' mathematical and didactic competencies by means of problem posing. En Krainer, K., & Vondrová, N. (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 9)*, (pp. 2861-2866). Prague, Czech Republic: ERME.
- Singer, F., Ellerton, N. y Cai, J. (Eds). (2015). *Mathematical Problem posing: From research to effective practice*. New York: Springer.
- Stewart, J. (2008). *Calculus: Early transcendentals* (Sixth edition). Thomson Brooks/Cole.