Quintaesencia
Revista de Educación
ISSN 2076-5363 (en línea)

Quintaesencia (2021), vol. 12, pp. 131 - 137
DOI: https://doi.org/10.54943/rq.v12i1.46

Taller en coloquio

V COLOQUIO BINACIONAL SOBRE LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA
V COBISEMAT

V Coloquio Binacional sobre la Enseñanza de las Matemáticas, Universidad Nacional de Tumbes, 28 y 29 de mayo de 2021 (V COBISEMAT)

Niveles de algebrización en respuestas de estudiantes obtenidas en las evaluaciones censales

Algebrization levels in student responses obtained in the census evaluations

Olimpia Castro [1] **Sahara Doria** [2, b] **Rosa Lafosse** [3]
Humberto Benavides [4]

[1] Oficina de Medición de la Calidad de los Aprendizajes (Perú) ocastro@minedu.gob.pe

[2] Oficina de Medición de la Calidad de los Aprendizajes (Perú) sdoria@minedu.gob.pe
[b] https://orcid.org/0000-0003-2129-4362

[3] Oficina de Medición de la Calidad de los Aprendizajes (Perú) rlafosse@minedu.gob.pe

[4] Oficina de Medición de la Calidad de los Aprendizajes (Perú) matematicaumc03@minedu.gob.pe

Información

Recibido: 14/03/2021.

Aceptado: 10/05/2021.

Palabras clave:

Niveles de algebrización, pensamiento algebraico, evaluación censal de estudiantes.

Resumen

Los niveles de algebrización nos permiten caracterizar el razonamiento algebraico que desarrollan los estudiantes a lo largo de la escolaridad. Dado que el docente es el principal facilitador para el desarrollo del pensamiento algebraico, es necesario que enriquezca su visión del álgebra a partir de propuestas de diversas investigaciones. El taller fue activo-participativo, se inició presentando y ejemplificando el marco teórico de referencia que nos permite definir los niveles de algebrización. Luego, los participantes analizaron algunas respuestas dadas a tareas propuestas en evaluaciones censales de estudiantes, con la finalidad de identificar elementos que permitan caracterizar el razonamiento algebraico de los estudiantes. Finalmente, se propició una reflexión acerca de la importancia de generar aprendizajes que fortalezcan los niveles de algebrización alcanzados por los estudiantes y potencien el desarrollo de niveles más altos.

Information

Keywords:

Levels of algebrization, algebraic thinking, student census evaluation.

Abstract

The levels of algebraization allow us to characterize the algebraic reasoning that students develop throughout their schooling. Since the teacher is the main facilitator for the development of algebraic thinking, it is necessary that he/she enriches his/her vision of algebra based on proposals from various researches. The workshop was active-participative, beginning with the presentation and exemplification of the theoretical frame of reference that allows us to define the levels of algebraization. Then, the participants analyzed some answers given to tasks proposed in students' census evaluations, with the purpose of identifying elements that allow characterizing students' algebraic reasoning. Finally, a reflection on the importance of generating learning that strengthens the levels of algebraization reached by students and promotes the development of higher levels of algebraic reasoning was encouraged.

INTRODUCCIÓN

El desarrollo del pensamiento algebraico es un aspecto esencial en el desarrollo de la competencia matemática de los estudiantes. Los resultados de las evaluaciones censales de estudiantes (ECE) nos proporcionan evidencia acerca de las dificultades que tienen para desarrollar su pensamiento algebraico. Esto podría estar asociado a creencias que tienen muchos docentes acerca del razonamiento algebraico, por ejemplo: asumen que este razonamiento comienza cuando aparece el uso de variables en las tareas matemáticas, lo asocian solo a ciertos contenidos matemáticos, o consideran que consiste en aplicar fórmulas o reglas rígidas. Según Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi (2014), el razonamiento algebraico involucra representar, generalizar y formalizar regularidades en cualquier ámbito de las matemáticas. Conforme se desarrolla este razonamiento, el estudiante va progresando en el uso del lenguaje matemático y el simbolismo necesario que le permite justificar y comunicar su pensamiento algebraico. Los autores también señalan que se pueden identificar niveles de algebrización que permiten diferenciar el tipo de razonamiento algebraico que el estudiante evidencia en el desarrollo de una tarea determinada.

Finalidad y diseño del taller

Este taller está dirigido a docentes de Matemática de los primeros grados del nivel secundaria. El propósito es brindarles orientaciones prácticas para identificar los niveles de algebrización que tienen los estudiantes, a partir del análisis de respuestas a tareas propuestas en las evaluaciones censales aplicadas en 2do grado de secundaria, con la finalidad de caracterizar el razonamiento algebraico que han desarrollado.

El taller será activo-participativo, a partir del marco conceptual de los niveles de algebrización propuesto por Godino et al. (2014), el cual será presentado y ejemplificado. Los participantes analizarán un conjunto de respuestas de estudiantes a tareas que fueron aplicadas en la ECE identificando los elementos y procesos que evidencien razonamientos algebraicos. Luego, se les pedirá que los asocien a un nivel de algebrización desde el nivel 0 hasta el nivel 3.

Implementación

Al analizar las respuestas de los estudiantes frente a una tarea, surgen preguntas como las siguientes: ¿qué características debe tener la respuesta de un estudiante para evidenciar un razonamiento algebraico?, ¿el uso de incógnitas, ecuaciones, símbolos, y operaciones usando símbolos aseguran la presencia de un razonamiento algebraico?, ¿el razonamiento algebraico está asociado solo a ciertos contenidos matemáticos como patrones o funciones? o ¿el razonamiento algebraico inicia en el nivel secundario?

Para poder responder a estas preguntas, lo primero que se debe definir es qué es el razonamiento algebraico y tomaremos como referente la definición dada por Godino et al. (2014). Ellos señalan:

El razonamiento algebraico implica representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades en cualquier aspecto de las matemáticas. A medida que se desarrolla este razonamiento, se va progresando en el uso del lenguaje y el simbolismo necesario para apoyar y comunicar el pensamiento algebraico, especialmente con las ecuaciones, las variables y las funciones. Este tipo de razonamiento funcional está en el corazón de las matemáticas concebidas como la ciencia de los patrones y el orden, ya que los procesos de formalización y generalización son procesos centrales de las matemáticas. (p.4)

Lo segundo es identificar algunas características del razonamiento algebraico que pueden evidenciarse en la actividad matemática de los estudiantes. De acuerdo a Godino et al. (2014) estas son:

- El reconocimiento de patrones y regularidades que se encuentran en diferentes situaciones numéricas, geométricas o físicas. Estos pueden ser ampliados o generalizados.
- El uso de símbolos como los que representan a las variables o los que permiten construir ecuaciones o inecuaciones. Estos se usan con la finalidad de expresar generalizaciones de patrones y relaciones.
- El uso de variables, las cuales pueden tener diferentes significados dependiendo si se usan como representaciones de valores específicos o de cantidades que varían o formando parte de una fórmula.
- El establecimiento de funciones, es decir, relaciones o reglas que asocian los elementos de un conjunto con los de otro, de manera que a cada elemento del primer conjunto le corresponde uno y solo uno del segundo conjunto.

Se ejemplificarán estas características a partir de la siguiente situación en la que se irá variando algunas condiciones de forma intencional con el objetivo de enfatizar cada una de las características del razonamiento algebraico.

Tabla 1. *Preguntas para reconocer las características del razonamiento algebraico a partir de una situación.*

Situación: Se tiene 12 frejoles y debemos repartirlos entre dos platos. ¿Cómo podría ser este reparto?	
Algunas preguntas para enfatizar el reconocimiento de regularidades.	¿Hay una sola forma de hacer este reparto? ¿Qué regularidad identificas en las cantidades que intervienen en cada reparto posible?
Algunas preguntas para propiciar el uso de símbolos.	¿Cómo representas con números las relaciones que has encontrado? ¿Puedes describir estas relaciones con una o más operaciones?
Algunas preguntas para propiciar el uso de variables.	¿Las cantidades que has representado con símbolos tienen siempre el mismo valor? ¿Qué cambia? ¿Qué no cambia? ¿Con una única expresión se pueden representar los diferentes tipos de reparto? ¿Puedes explicar lo que representa cada símbolo en la expresión que has
Algunas preguntas para reconocer funciones.	¿Alguna de las cantidades representadas depende de otra? ¿Qué significa esto? ¿Cómo expresas la cantidad de frejoles de un plato a partir de la cantidad que hay en el otro?

Por otro lado, Godino, et al. (2014) señala que estas características del razonamiento algebraico son sencillas de apreciar, y los docentes no deben quedarse en esa reflexión, sino que deben tener una visión más amplia. Frente a esto, es necesario profundizar en el conocimiento de objetos y procesos algebraicos presentes en una actividad matemática.

Los objetos algebraicos son:

- Relaciones binarias de orden o equivalencia y sus propiedades (reflexiva, transitiva y simétrica o antisimétrica). Por ejemplo:

$$\mathbf{5 + 7 = 4 + 8}$$

- Operaciones y sus propiedades (conmutativa, distributiva, existencia de elemento neutro y de un inverso). Además, conceptos como ecuaciones, inecuaciones e incógnitas. Procedimientos tales como eliminación, trasposición de términos, factorización, desarrollo de términos, entre otros. Por ejemplo:

$$\mathbf{3 + x = 12}$$

- Funciones que incluyen las operaciones y propiedades asociadas mediante: variables, fórmulas, parámetros, etc., en sus diferentes representaciones: tabular, gráfica, como fórmula, etc. Por ejemplo:

$$f(x) = 12 - x, \forall\, x \in \mathbf{N} \leq 12$$

- Estructuras, sus tipos y propiedades característicos del algebra superior o abstracta.

Los procesos algebraicos son la particularización y la generalización. Como resultado de la generalización obtenemos la regla que es un tipo de objeto matemático que se denomina *intensivo*. Mediante el proceso inverso de particularización se obtienen objetos *extensivos* o particulares. Por otro lado, el objeto intensivo o regla se convierte en una nueva entidad unitaria mediante el proceso de unitarización, la cual se hace *ostensiva* o materializada mediante un nombre, icono o símbolo, a fin de que pueda participar de otras prácticas, procesos y operaciones. Este triple proceso (reconocimiento de la generalidad, unitarización y materialización) permite definir los niveles de pensamiento algebraico.

Niveles de algebrización

Godino et al. (2014) menciona que los niveles de algebrización permiten diferenciar el tipo de razonamiento algebraico que el estudiante evidencia en el desarrollo de una tarea. Por lo tanto, estos niveles no se asignan a la tarea sino a las acciones matemáticas que realiza el estudiante cuando la resuelve. Los criterios básicos para definir los niveles de algebrización son:

- Generalización, es decir, la generación o inferencia de intensivos (reglas).
- Unitarización que implica el reconocimiento explícito de intensivos como entidades unitarias.

Formalización y ostensión mediante expresiones simbólico-literales.

Transformación, utilización de objetos intensivos en cálculos y nuevas generalizaciones.

A continuación, se mostrarán rasgos característicos de los niveles de razonamiento algebraico elemental. Según Godino et al. (2015) estos son:

Nivel 0. Intervienen objetos particulares expresados mediante lenguaje coloquial, numérico o icónico. Pueden intervenir símbolos que refieren a un valor desconocido, pero dicho valor se obtiene como resultado de operaciones sobre objetos particulares. El reconocimiento de la regla recursiva que relaciona un término con el siguiente, en casos particulares, no es indicativa de generalización.

Nivel 1. Intervienen objetos expresados con cierta generalidad que se reconocen de manera explícita mediante lenguaje coloquial, numérico o icónico. Pueden intervenir símbolos que refieren a los objetos generalizados reconocidos, pero sin operar con dichos objetos. En tareas estructurales (operaciones y propiedades de los números) se aplican relaciones y propiedades de las operaciones y pueden intervenir datos desconocidos expresados simbólicamente. En tareas funcionales (asociadas a relaciones de dependencia) se reconoce la generalidad, aunque expresada en un lenguaje diferente al simbólico-literal, porque solo se trabaja con objetos extensivos o particulares.

Nivel 2. Intervienen variables expresadas con lenguaje simbólico – literal para referir a los elementos generalizados reconocidos, aunque ligados a la información del contexto de la situación. En tareas estructurales las ecuaciones son de la forma $Ax \pm B = C$. En tareas funcionales se reconoce la generalidad, pero no se opera con las variables para obtener formas canónicas de expresión.

Nivel 3. Intervienen variables expresadas con lenguaje simbólico – literal sin estar ligado a la información del contexto y se opera con ellas; se realizan transformaciones en la forma simbólica de las expresiones conservando la equivalencia. En tareas estructurales, se realizan tratamientos con las incógnitas para resolver ecuaciones del tipo $Ax \pm B = Cx \pm D$, y la formulación simbólica y descontextualizada de reglas canónicas de expresión de funciones y patrones.

MATERIAL Y MÉTODOS

A continuación, se identificarán los rasgos característicos de los niveles de razonamiento algebraico en ejemplos de respuestas correctas de los estudiantes en una tarea de la ECE que se muestra en la figura 1. Esta tarea establece relaciones entre las nociones de área y perímetro, que corresponde a la competencia Resuelve problemas de forma, movimiento y localización.

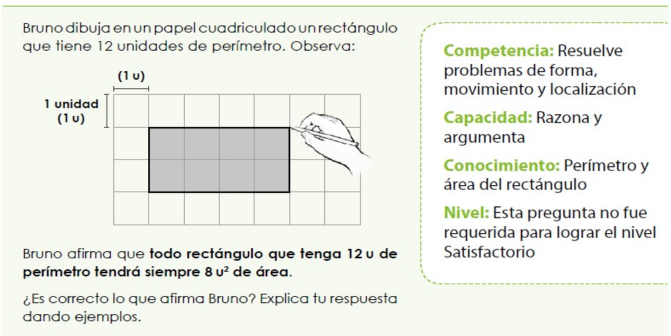
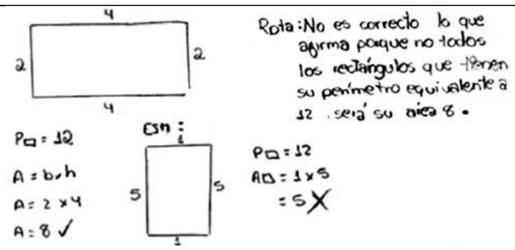
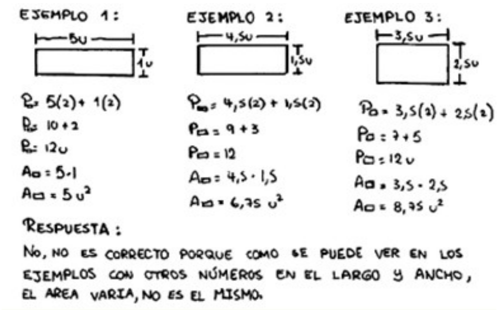


Figura 1. *Tarea que relaciona nociones de área y perímetro* / Minedu (2018, p.23)

Tabla 2.

Rasgos característicos de niveles de razonamiento algebraico.

<table>
<tr><th>Nivel</th><th>Características y ejemplo</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Nivel 0
Ausencia</td><td>Intervienen objetos particulares expresados mediante lenguaje numérico y gráfico. Usa símbolos para representar una relación conocida entre los datos dados (fórmula del área del rectángulo) y realiza operaciones aritméticas con el caso particular que presenta. No se evidencia una generalización.</td></tr>
<tr><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Nivel 1
Incipiente</td><td>En este caso el estudiante propone tres casos particulares expresados mediante lenguaje coloquial y numérico que evidencian inicios de una generalidad a partir de las relaciones que encuentra entre los datos y los resultados de las operaciones.</td></tr>
<tr><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Nivel 2
Intermedio</td><td>A partir de la organización de datos particulares en una tabla identifica ciertas regularidades y las expresa usando variables en lenguaje simbólico – literal para referirse a los elementos generalizados reconocidos (relación entre la medida de largo y ancho a partir del perímetro), aunque ligados a la información del contexto de la situación.</td></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><th>Largo (u)</th><th>Ancho (u)</th><th>Perímetro (u)</th><th>Área (u²)</th></tr>
<tr><td>4</td><td>2</td><td>12</td><td>8</td></tr>
<tr><td>5</td><td>1</td><td>12</td><td>5</td></tr>
<tr><td>3</td><td>3</td><td>12</td><td>9</td></tr>
<tr><td>4,5</td><td>1,5</td><td>12</td><td>6,75</td></tr>
<tr><td>3,5</td><td>2,5</td><td>12</td><td>8,75</td></tr>
</table>
Perímetro del rectángulo es 12 donde (l) es largo, (a) es ancho, (P) es perímetro y (A) es área.
$P = 2l + 2a = 12$; entonces $l + a = 6$ donde $l = 6 - a$
$A = l \times a$, reemplazado en la tabla.
No es correcto porque él área cambia a pesar de que el perímetro es el mismo.
</td></tr>
</table>

Nivel 3 *Consolidado*	Intervienen variables con lenguaje simbólico para expresar las relaciones entre los lados y el perímetro desprendiéndose de la información del contexto para vincularlas luego con el área. Realiza operaciones con las variables para expresar una generalización sobre la relación entre el área y la medida de uno de los lados que le permite llegar a una conclusión.
	$P = 2l + 2a = 12$; entonces $l + a = 6$ donde $l = 6 - a$ $A = (6 - a)a = 6a - a^2$ *No es correcto, porque rectángulos con el mismo perímetro pueden tener áreas diferentes. El rectángulo con perímetro 12 tendrá un área igual a 8 solo cuando uno de los lados sea 2.*

El análisis de procesos de resolución nos permite identificar los elementos que caracterizan el razonamiento algebraico de los estudiantes. Estos son:

- la presencia de objetos intensivos que evidencian generalización
- el tratamiento (operaciones y propiedades) que se aplica a dichos objetos
- el tipo de lenguaje (natural, numérico, gráfico y simbólico-literal) usado para representar dichos objetos

La presencia de estos elementos está asociada a diferentes niveles de algebrización.

De acuerdo a Radford (2011) el razonamiento algebraico no ocurre de forma natural y espontánea en los estudiantes, sino que requiere de un proceso planificado de actividades y situaciones que pueden estar asociadas a contenidos aritméticos o de otras competencias que propicien el desarrollo de su pensamiento hacia niveles progresivos de generalización. Esto se desarrollará a lo largo de toda la escolaridad iniciándose desde los primeros grados de primaria para que se pueda consolidar en la secundaria.

No es suficiente con que algunos aspectos y conocimientos del algebra estén presentes en el currículo y en nuestra planificación escolar, en este proceso es necesaria la intervención de un facilitador, es decir, el docente que será el principal promotor y agente de cambio. Para lograr esto, primero es necesario asegurar que el docente se apropie de un sentido algebraico más amplio que le permita identificar las características de las prácticas matemáticas y los procesos de pensamiento de los estudiantes sobre los cuales puede actuar para aumentar progresivamente el nivel de algebrización.

RESULTADOS

A partir de las actividades propuestas en este taller esperamos en los participantes resultados como los siguientes:

- Conocerán las características que definen el pensamiento algebraico y los rasgos propios de cada nivel de razonamiento.
- Reconocerán que este tipo de razonamiento no solo contempla contenidos específicos, sino que puede estar asociado a distintas áreas de la Matemática y debe ser desarrollado desde los primeros grados de la escolaridad.

Reflexionarán acerca de la importancia de incorporar el análisis de respuestas de los estudiantes como una práctica docente que le permitirá caracterizar el razonamiento algebraico de sus estudiantes para fortalecer y generar aprendizajes.

REFERENCIAS

Godino, J., Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, 32.1, 199-219.

Godino, J., Neto, T. Wilhelmi, M., Aké, L. Etchegaray, S. & Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 8, 117-142.

Ministerio de Educación [Minedu]. (2016). *Currículo Nacional de la Educación Básica.* Lima: Autor. Recuperado de http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/curriculo-nacional-de-la-educacion-basica.pdf

Ministerio de Educación [Minedu]. (2018). ¿Qué logran nuestros estudiantes en Matemática? Informe para docentes 2.° grado de secundaria, Lima: Autor. Recuperado de http://umc.minedu.gob.pe/wp-content/uploads/2019/04/Informe-Matem%C3%A1tica-ECE2018-2S.pdf

Radford, L. (2011). Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. En, J. Cai, E. Knuth (eds.), *Early algebraization. Advances in mathematics education.* (pp. 303-322). Berlin: Springer-Verlag.

.