

## Taller en coloquio



V Coloquio Binacional sobre la Enseñanza de las Matemáticas, Universidad Nacional de Tumbes, 28 y 29 de mayo de 2021 (V COBISEMAT)

# Series de Fourier en el movimiento de los planetas. Un estudio de replicación

## Fourier series in the motion of planets. A replication study

Franco Mariani Rivas <sup>1</sup>

Avenilde Romo Vázquez <sup>2, b</sup>

<sup>1</sup> Instituto Politécnico Nacional –Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, México

[francomariani88@gmail.com](mailto:francomariani88@gmail.com)

<sup>2</sup> Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav, México

[avenilde.romo@cinvestav.mx](mailto:avenilde.romo@cinvestav.mx)

<sup>b</sup> <https://orcid.org/0000-0002-1364-5997>

### Información

Recibido: 14/03/2021.

Aceptado: 10/05/2021.

### Palabras clave:

Series de Fourier, movimiento planetario, estudio de replicación.

### Information

### Keywords:

Fourier series, planetary motion, replication study.

### Resumen

El taller se centra en un estudio de replicación (Aguilar, 2020) donde los participantes resolverán problemas de matemática aplicada a un contexto físico como el del movimiento de los planetas, resignificando a la Serie Trigonométrica de Fourier. Las tareas propuestas surgen de un análisis epistemológico de la serie (Farfán y Romero, 2019), lo que es compatible con los principios del paradigma del Cuestionamiento del Mundo, definidos en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1999). El público considerado es profesores de matemática o física, o también estudiantes avanzados ya que en el desarrollo de las tareas pueden aparecer nociones matemáticas: funciones trigonométricas, series, integrales, funciones, sucesiones de funciones y sistemas de coordenadas cartesianas.

### Abstract

The workshop focuses on a replication study (Aguilar, 2020) where participants will solve mathematical problems applied to a physical context such as the motion of the planets, resignifying the Fourier Trigonometric Series. The proposed tasks arise from an epistemological analysis of the series (Farfán and Romero, 2019), which is compatible with the principles of the Questioning the World paradigm, defined in the Anthropological Theory of the Didactic (Chevallard, 1999). The audience considered is mathematics or physics teachers, or also advanced students, since mathematical notions may appear in the development of the tasks: trigonometric functions, series, integrals, functions, successions of functions and Cartesian coordinate systems.

## INTRODUCCIÓN

El diseño de actividades y de recursos didácticos es parte del quehacer de la Educación Matemática. Sin embargo, muchos de los recursos producidos no son difundidos, limitando sus alcances y efectos en la enseñanza regular. Con el objetivo de incidir en la difusión de recursos didácticos producidos en las investigaciones en didáctica de las matemáticas, en esta investigación nos propusimos desarrollar un estudio de replicación (Aguilar, 2020).

La replicación se refiere a los investigadores que realizan un estudio repetido de un proyecto que generalmente se ha publicado en una revista o libro revisado por pares. Sin embargo, esto no es lo mismo que la duplicación (Firmin, 2008). Es imposible, según algunos autores, reproducir exactamente las mismas condiciones de una experiencia que involucra a individuos en un cierto contexto en un determinado tiempo. Dada esta situación, es que se distinguen dos grandes tipos de estudios replicación: la replicación directa y la conceptual. En la directa se pretende repetir exactamente la experiencia

mientras que la conceptual es más amplia, se entiende como una repetición de una prueba de hipótesis o de los resultados de ciertos trabajos de investigaciones a través de diferentes métodos. Es decir, la idea principal sigue en pie, pero hay ciertas modificaciones.

Si bien tanto la replicación directa como la conceptual se pueden considerar diametralmente opuestas, se pueden hacer diferentes tipos de estudios de replicación más cerca de una que de la otra. Siguiendo a Aguilar (2020), estas replicaciones pueden clasificarse según sus características, así como también puede hablarse de una replicación interna o externa que se reflejan en la Tabla 1:

**Tabla 1**

Tipo de replicación

Tipo de replicación	Replicación directa	Replicación cercana	Replicación conceptual	Replicación interna	Replicación externa
Características	Una réplica exacta de un procedimiento experimental. Es prácticamente inviable llevar a cabo este tipo de estudio de replicación en las ciencias sociales (incluida la educación matemática)	Replicación que trata de cumplir con los procedimientos del estudio original tanto como sea posible	Replicación de una prueba de una hipótesis del resultado de un trabajo de investigación anterior con diferentes métodos de los utilizados en el estudio original	Replicación realizada por los mismos investigadores que realizaron el estudio original	Replicación realizada por investigadores externos al estudio original.

Aguilar (2020) plantea que los estudios de replicación son importantes porque permiten comprender más profundamente algunos de los fenómenos que se han identificado y estudiado en el campo de la educación matemática, así como también permiten saber más sobre las condiciones que favorecen los resultados de las investigaciones, limitar su validez y ampliar la comprensión de las variables que influyen en la investigación.

## MATERIAL Y MÉTODOS

La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) permite análisis de la actividad humana en su dimensión institucional (Chevallard, 1999). Toda actividad puede ser analizada mediante la praxeología  $[T, \tau, \theta, \Theta]$ , conformada por cuatro componentes: los tipos de tareas ( $T$ ), —lo que se hace—; las técnicas ( $\tau$ ) —la forma en que se hace—, las tecnologías ( $\theta$ ) —porqué se hace así—

y la teoría ( $\Theta$ ) —justificaciones más generales de porqué se hace así—. Las dos primeras componentes conforman el bloque técnico-práctico, lo que llamamos saber-hacer y las otras dos, el bloque tecnológico-teórico o lo que llamamos saber. Las praxeologías corresponden a organizaciones de la actividad y se pueden establecer relaciones entre diferentes organizaciones. En el caso de las matemáticas, las praxeologías u organizaciones matemáticas (OM) y las praxeologías u organizaciones didácticas (OD) se co-determinan. Es decir, una OM puede ser organizada didácticamente de diferentes maneras y cada una de ellas, afecta su organización matemática. De la misma manera, la OM elegida (e.g., intuitiva, formal, muy abstracta) incide en su OD. La OD puede definirse como el proceso de estudio de una OM mediante seis momentos didácticos: M1 Momento del primer encuentro; M2 Momento exploratorio, M3 Momento de la construcción del bloque tecnológico-teórico; M4 Momento del trabajo de la técnica; M5 Momento de la evaluación y M6 Momento de la institucionalización.

La replicación de una actividad didáctica en el marco de esta teoría está relacionada con el análisis de la dimensión ecológica, es decir analizar la influencia de las condiciones y restricciones de la institución educativa en la replicación. ¿Qué condiciones posibilitan la implementación del recurso didáctico?, ¿qué adaptaciones son posibles?, ¿cuáles restricciones motivan ciertas adaptaciones o impiden su

implementación? Se trata de identificar la viabilidad institucional que posibilita la replicación y particularmente las adaptaciones requeridas, de acuerdo a las características de la institución donde la implementación con un grupo de estudiantes tiene lugar. Ahora bien, involucrar a los profesores en el estudio de la dimensión ecológica, implica elementos metodológicos relacionados con una experiencia vivencial del recurso didáctico y de actividades que permitan reconocer que las condiciones institucionales, determinan ciertas adaptaciones del recurso o de la propia enseñanza (la posibilidad de incorporar nuevas tecnologías, las actividades prescritas para los estudiantes y para el docente, un plan de estudios rígido, la posibilidad de implementar actividades abiertas o que promuevan procesos de investigación, el trabajo en equipo, etc.).

## **RESULTADOS**

En este taller se propone analizar una de las tareas de la secuencia didáctica producida por Farfán y Romero (2019), basada en el modelo alejandrino del movimiento de los planetas, con el objetivo de construir y dar sentido a la serie de Fourier. La secuencia está compuesta por seis grandes tareas: 1) Explicando el movimiento de los planetas; 2) Modelando el movimiento de los planetas; 3) Un modelo más general; 4) El fenómeno de Gibss; 5) El modelo general; 6) El cálculo de los coeficientes, que se proponen dentro de un applet de Geogebra en formato de “libro”: <https://www.geogebra.org/m/byc8hxdv>. Esta secuencia es el resultado de la investigación educativa y de alguna manera podría suponerse que su destino es el de ser implementada por los docentes de matemáticas o de física en el aula. Lo que lleva a cuestionarse ¿cuál es el proceso requerido para que un docente implemente un material didáctico en el aula? Es decir, ¿cuáles son las adaptaciones que realiza el profesor y cuáles son los conocimientos que las fundamentan? Georget (2009) sugiere que, en el análisis de los recursos didácticos, concebidos como la actividad didáctica y una guía para su implementación, puede realizarse considerando cuatro categorías ergonómicas: flexibilidad, utilidad, usabilidad, y adaptabilidad del recurso didáctico y tres potenciales, el didáctico, el de resistencia dinámica y el de debate. Con el objetivo de mostrar una ruta para realizar este proceso y de analizar su alcance y sus limitantes, se proponen en este taller, tres grandes actividades:

- 1) Presentar y realizar la tarea 1
- 2) Analizar la OM y la OD de la tarea 1
- 3) Analizar las condiciones y restricciones escolares

Estas tres actividades en su conjunto pretenden dar cuenta de las dimensiones epistemológica, didáctica y ecológica relacionadas con la implementación de un material o recurso didáctico en el aula.

### **1) Presentar y realizar la tarea 1**

Un primer paso para el análisis de un material didáctico consiste en realizarlo, adoptando el rol de matemático o de aprendiz matemático (Sierra, 2006; Olarría-Ruiz, 2015). Esto permite reconocer el tipo de tarea que se propone, ya sea una consigna típica en la que se indica lo que debe hacerse: calcular un integral, encontrar el valor de un ángulo, demostrar un teorema, encontrar el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales, etc. O bien, desarrollar una tarea en un contexto no matemático o abierta que motive la creatividad, la exploración de técnicas y su validación por parte del estudiante. En este caso la tarea 1 es una introducción a la secuencia mediante el modelo de los griegos para el estudio de los planetas representado en Geogebra y se solicitará a los participantes realizarla de manera autónoma.

### **2) Analizar la OM y la OD de la tarea 1**

En esta segunda actividad del taller se analizará la OD apoyada en el uso del applet, que los autores de la secuencia proponen. En la tarea introductoria los autores presentan el modelo alejandrino de los planetas: “Los astrónomos alejandrinos (323 a.C. - 30 a.C.) propusieron un modelo para el movimiento de los planetas, [...] consistía en una circunferencia centrada en la Tierra y sobre su perímetro se mueve un punto, [...] centro de otra circunferencia, y sobre el perímetro de esta se mueve otro punto, el cual es centro de otra circunferencia y así sucesivamente, todos los puntos se mueven con velocidad angular uniforme y en sentido anti-horario. A este modelo del movimiento se le conoce con el nombre de superposición de movimientos circulares o epiciclos.” En el applet, la tierra aparece al centro de una

circunferencia y está simbolizada con la  $T$ , sobre el perímetro de la circunferencia, aparece un punto  $P$ , como se ilustra en la figura 1.

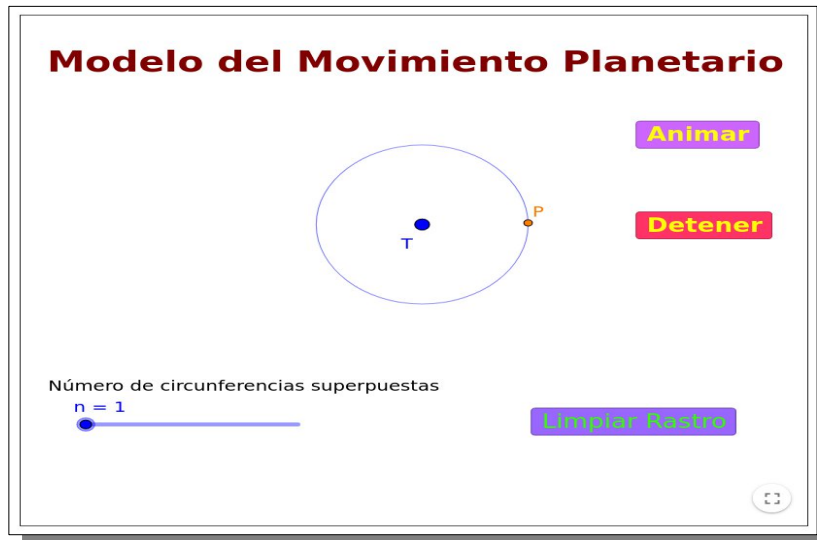


Figura 1. Applet propuesto para explorar el modelo alejandrino

Esta tarea posibilita el momento de encuentro con la tarea (M1): estudiar el cambio de la trayectoria del planeta  $P$  con relación a cierto número de circunferencias. El applet permite elegir hasta cuatro circunferencias a través del deslizador, como se muestra en las figuras 2 y 3. Asimismo, esta tarea posibilita un primer acercamiento con el applet y el deslizador, particularmente, para quienes no tengan experiencia con Geogebra.

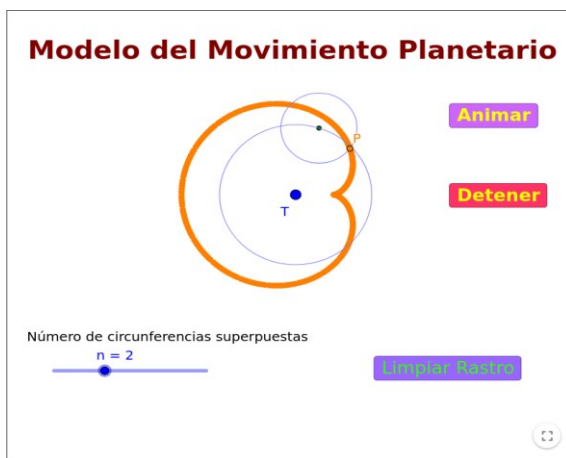


Figura 2. Movimiento planetario con  $n=2$

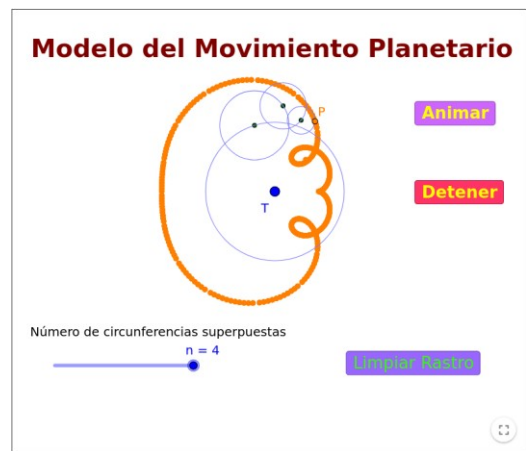
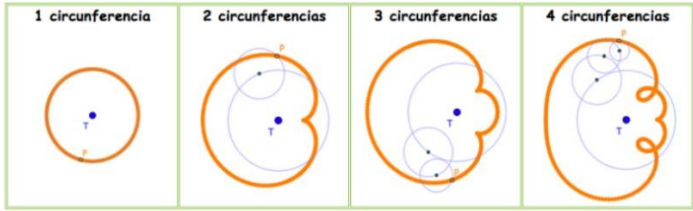


Figura 3. Movimiento planetario con  $n=4$

La tarea 1 “Explicando el movimiento de los planetas” se divide en dos partes:

Parte I. ¿Qué permite explicar este modelo?

Llamemos a la Tierra  $T$  y considere la trayectoria de un planeta  $P$  que se mueve alrededor de la Tierra, utilizando el modelo de los epiciclos con una, dos, tres y cuatro circunferencias.



Responde a las siguientes preguntas:

- ¿Por qué crees que el modelo con una única circunferencia no permite explicar el cambio de luminosidad de los planetas, las estaciones del año y el fenómeno de retrogradación? Explica con tus propias palabras.
- De los modelos con 2, 3 y 4 circunferencias ¿cuál(es) permite(n) explicar el cambio de luminosidad de los planetas y las estaciones del año? Explica con tus propias palabras y ejemplifica utilizando una porción de la trayectoria de alguno(s) de los modelos.
- De los modelos con 2, 3 y 4 circunferencias ¿cuál(es) permite(n) explicar el fenómeno de retrogradación? Explica con tus propias palabras y ejemplifica utilizando una porción de la trayectoria de alguno(s) de los modelos.

Figura 4. Consigna de la parte I de la Actividad introductoria

La primera parte de esta actividad apunta a contrastar el modelo de los epiciclos de los alejandrinos con el de los griegos, que es el caso en que hay una única circunferencia. En el modelo griego, la distancia del planeta  $P$  a la Tierra es la misma por lo que no se corresponde con el cambio de luminosidad que aparentan los planetas. En la época de los astrónomos alejandrinos se creía que el cambio de brillo estaba relacionado con la distancia a la Tierra y esto se ajustaba mejor a su modelo con más circunferencias. La misma explicación se daba para las estaciones del año, como el Sol era considerado un planeta, el modelo griego no se contrastaba con la realidad de manifestar las diferentes estaciones. El fenómeno de retrogradación planetaria está relacionado con la trayectoria que describen en el cielo los planetas. Si se enfoca, por ejemplo, en el movimiento aparente que describe Marte se puede observar con el transcurso del tiempo que parece detenerse progresivamente, retroceder y luego continuar con su trayectoria “habitual”, como se muestra en la figura 5.

Este recorrido no puede explicarse desde el modelo griego con una única circunferencia, pues todos los planetas seguirían la trayectoria con la misma velocidad y no describirían esos “retrocesos” donde el cuerpo celeste parece dirigirse en sentido contrario al previsto. Actualmente, se sabe que la Tierra y Marte giran alrededor del Sol pero al planeta rojo le lleva casi dos años terrestres recorrer su órbita de forma completa. Esto implica que en cierto momento nuestro planeta se “adelante” y produzca ese movimiento aparente en el cielo.



Figura 5. Vista y modelo del movimiento aparente de Marte

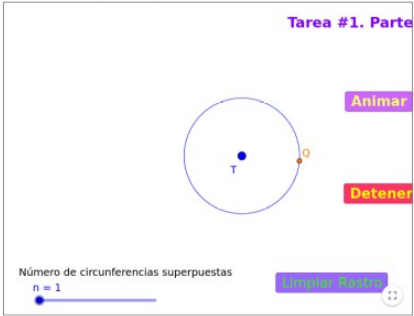


Con respecto a las partes b) y c) de esta tarea 1, se puede concluir que cualquiera de los modelos con 2, 3 o 4 circunferencias permiten explicar el cambio de brillo o el fenómeno de las estaciones, puesto que logra evidenciar que la distancia del planeta  $P$  a la Tierra varíe. Sin embargo, los modelos con 2 o 3 circunferencias no describen el fenómeno de retrogradación. Para ello, se necesitan 4 circunferencias (pueden ser más, pero en el applet el máximo permitido es 4) para que se generen esos “bucles” en el cielo.

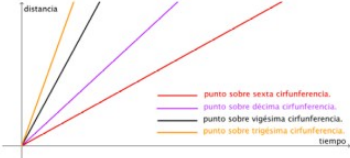
De todas formas, ese adelantamiento de la Tierra sobre Marte que produce ese movimiento aparente no lo contemplaban, porque pensaban que los planetas no giraban alrededor del Sol. En esa época primaba la teoría geocéntrica y el modelo de los epiciclos propuesto por los alejandrinos se asemejaba mejor a los datos empíricos.

**Parte II. ¿Y si aumentamos el número de epiciclos?**

Llamemos a la Tierra  $T$  y considere la trayectoria de un planeta  $Q$  que se mueve alrededor de la Tierra, utilizando el modelo de los epiciclos, como se muestra a continuación:



Responde a las siguientes preguntas:

- ¿Cómo cambian los radios de una circunferencia a otra conforme se van agregando?
- La siguiente gráfica muestra la distancia recorrida por el punto que se mueve sobre las circunferencias sexta, décima, vigésima y trigésima.
 

¿Cómo cambia el movimiento de dichos puntos de una circunferencia a otra?

- ¿Cómo cambia la trayectoria del planeta conforme se agregan más y más circunferencias?
- ¿Crees que exista alguna relación entre tu respuesta de la pregunta (c) y lo que respondiste en las preguntas (a) y (b)?, ¿por qué sí? o ¿por qué no?

Figura 6. Consigna de la parte II de la Actividad introductoria

La parte a) se puede responder con la manipulación y observación del applet, que los radios de las circunferencias que se van agregando son cada vez menores, en otras palabras, tienden a cero. Con respecto a la parte b), se considera que no está clara la consigna porque puede dar lugar a confusión, pues de las representaciones gráficas se puede deducir que cada punto se mueve a velocidad constante aunque distintas, según la circunferencia. Sin embargo, como dice que se trata de la distancia recorrida, no queda claro si se refiere a la velocidad angular respecto específicamente de la circunferencia en la que se mueve o a la velocidad del planeta que va recorriendo cierta trayectoria. En este último caso, al hacer simulaciones con el applet se observa que el punto no recorre su trayectoria con la misma velocidad, incluso hay intervalos breves de tiempo donde parece casi detenerse por la propia órbita que describe. De hecho en el artículo se manifiesta que al llevar adelante la propuesta didáctica, han tenido que aclarar este aspecto para que se considere la primera situación. Otra observación que puede hacerse es que algo cambió con respecto al applet de la introducción, porque si se elige una cantidad cualquiera de circunferencias, ya no se describe en la trayectoria ese fenómeno de retrogradación, ni siquiera con cuatro como el caso introductorio. Seguramente no influye en la realización de esta parte de la tarea, pero puede ser algo que pueda analizarse, que se está cambiando el modelo en algún aspecto y podría

evaluarse si es pertinente hacer alguna pregunta que haga reflexionar sobre esto. Con respecto al inciso c), se realiza una pregunta interesante porque pueden haber múltiples observaciones y el docente puede aprovechar para proponer una puesta en común y enriquecer las ideas que surjan. Además, se pueden detallar algunas características de la trayectoria conforme se van agregando más circunferencias que están intrínsecamente relacionadas con la convergencia de una serie, aunque aún no se haya explicitado nada al respecto en la consigna. Más aún, hasta esta tarea, el enfoque está en aspectos cualitativos del movimiento planetario y no se ha solicitado calcular absolutamente nada. Como se decía anteriormente, se puede deducir a partir del applet que “una parte” de la trayectoria parece estabilizarse a medida que se agregan circunferencias y “otra parte” sigue inestable. Sin embargo, la trayectoria en sí como un todo, no parece cambiar mucho cuando el número de circunferencias va en aumento.

La última parte de esta actividad puede resultar compleja de contestar debido a que se espera establecer una relación entre lo trabajado anteriormente. Una conjetura que se espera que surja es la siguiente: agregar circunferencias implica ir reduciendo la dimensión de sus radios, pero a la vez aumentar la velocidad respecto de la circunferencia en la que se mueve para generar la estabilidad de la trayectoria del planeta. La complejidad identificada se basa en que con los elementos trabajados no pueden probar su conjetura, de eso se encargarán las tareas que siguen.

### 3) Analizar las condiciones y restricciones escolares

Se analizará cómo la pedagogía tradicional puede ser una limitante para la implementación de esta actividad en el aula y formas para flexibilizar ciertas restricciones institucionales.

## DISCUSIÓN

La replicación de recursos didácticos es una actividad que desarrollan la mayoría de los docentes. Sin embargo, no siempre se cuentan con herramientas teóricas y metodológicas para regular y controlar la forma en que estas replications tienen lugar y sobre todo el rol que la ecología didáctica juega en dicha actividad. Es por ello, que en este taller se propone analizar la dimensión ecológica -casi invisible por su cotidianeidad- y la forma en que puede ser modificada para implementar recursos didácticos, surgidos en otros paradigmas educativos.

## REFERENCIAS

- Aguilar, M.S. (2020). Replication Studies in Mathematics Education: What Kind of Questions Would Be Productive to Explore? *International Journal of Science and Mathematics Education*, 18, 37-50. <https://doi.org/10.1007/s10763-020-10069-7>
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221–266.
- Farfán, R. M., & Romero, F. (2019). Situación de Aprendizaje para la Serie Trigonométrica de Fourier desde la Teoría Socioepistemológica. *Acta Scientiae*, 21(2), 22-48
- Firmin, M. W. (2008). Replication. In L. M. Given (Ed.), *The sage encyclopedia of qualitative research methods* (pp. 754–755). Sage.
- Georget, J-P. (2009). *Activités de recherche et de preuve entre pairs à l'école élémentaire: perspectives ouvertes par les communautés de pratique d'enseignants*. IREM de Paris.
- Ruiz-Olarría, A. (2015). *La formación matemático-didáctica del profesorado de secundaria: De las matemáticas por enseñar a las matemáticas para la enseñanza*. (Tesis de doctorado). Universidad Autónoma de Madrid, Madrid, España.
- Sierra, T. A. (2006). *Lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas. Los sistemas de numeración y la medida de magnitudes* (Tesis de doctorado). Universidad Complutense de Madrid, Madrid, España.