Quintaesencia
Revista de Educación
ISSN 2076-5363 (en línea)

Quintaesencia [(2021), vol. 12, pp. 115 - 121]
DOI: https://doi.org/10.54943/rq.v12i1.43

Artículo de conferencia

V COLOQUIO BINACIONAL SOBRE LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA
V COBISEMAT

V Coloquio Binacional sobre la Enseñanza de las Matemáticas, Universidad Nacional de Tumbes, 28 y 29 de mayo de 2021 (V COBISEMAT)

Los fractales en la enseñanza-aprendizaje de la concepción dinámica del concepto de límite de una sucesión: una propuesta didáctica para estudiantes de Bachillerato General Unificado (BGU)

Fractals in the teaching-learning of the dynamic conception of the concept of limit of a sequence: a didactic proposal for students of the Bachillerato General Unificado (BGU)

Ana Lucía Arias Balarezo [1, a] Jhon Lima Yarpaz [2] Jimmy Muela Pillajo [3]

[1] Universidad Central del Ecuador
[a] https://orcid.org/0000-0002-2317-9600
alarias@uce.edu.ec

[2] Universidad Central del Ecuador
jjlima@uce.edu.ec

[3] Universidad Central del Ecuador
jamuelap@uce.edu.ec

Información

Recibido: 14/03/2021.
Revisado: 11/04/2021.
Aceptado: 26/05/2021.
Publicado: 12/12/2021.

Palabras clave:

Teoría APOE, límite de una sucesión, fractales.

Resumen

El objetivo de la presente investigación fue diseñar tareas didácticas para la enseñanza-aprendizaje de la concepción dinámica del concepto de límite de una sucesión para estudiantes de Bachillerato General Unificado (BGU) mediante el uso de fractales. La investigación se sustenta en el constructo de origen Piagetiano denominado Descomposición Genética (DG) y en la teoría Acción-Proceso-Objeto-Esquema (APOE), también se consideran las dificultades asociadas al proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto de límite, así como los sistemas de representación numérico y simbólico. Tiene un enfoque cualitativo, un nivel de profundidad descriptivo. El producto final de este trabajo fue un conjunto de tareas enmarcadas en las construcciones y mecanismo de la teoría APOE que permiten a los estudiantes de BGU deducir en términos de límite de una sucesión las dimensiones de fractales como el Conjunto de Cantor, Copo de nieve de Koch, Alfombra y Triángulo de Sierpinski.

Information

Keywords:

APOS theory, limit of a sequence, fractals.

Abstract

The objective of the present research was to design didactic tasks for the teaching-learning of the dynamic conception of the concept of limit of a sequence for students of Bachillerato General Unificado (BGU) through the use of fractals. The research is based on the Piagetian construct called Genetic Decomposition (GD) and on the Action-Process-Object-Object-Scheme (APOE) theory; it also considers the difficulties associated with the teaching and learning process of the concept of limit, as well as the numerical and symbolic representation systems. It has a qualitative approach, a descriptive level of depth. The final product of this work was a set of tasks framed in the constructs and mechanism of APOE theory that allow BGU students to deduce in terms of the limit of a sequence the dimensions of fractals such as the Set of Cantor, Koch's Snowflake, Carpet and Sierpinski's Triangle.

INTRODUCCIÓN

La enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite es un proceso complejo, así lo aseveran investigadores como Blázquez y Ortega (2001), Cornu (1991), Cottrill et al. (1996), Pons, (2014), Sierpinska (1985), Sierra, Gonzales y López (2000) y Valls, Pons y Llinares, (2011). Varias investigaciones se han preocupado por caracterizar las dificultades que se generan en este proceso, al respecto Artigue (1995) indica que: "Las dificultades de acceso al cálculo son de diversa índole y se imbrican y refuerzan en redes complejas. Por lo tanto, es posible reagruparlas en grandes categorías", estas categorías son: la complejidad matemática de los objetos básicos del cálculo, la conceptualización y formalización de la noción de límite y su tratamiento en la enseñanza, y la ruptura álgebra-cálculo. Además de las dificultades antes señaladas respecto al desarrollo de la comprensión del significado de límite de una función, se debe considerar la influencia de los diferentes modos de representación donde se evidencia la brecha entre el pensamiento analítico y el algebraico (Blázquez y Ortega, 2000; Elia et al., 2009; Moru, 2009).

El sistema educativo ecuatoriano no escapa a esta problemática toda vez que la concepción que orienta el tratamiento de esta temática en la organización curricular oficial, determina entre otras destrezas con criterios de desempeño básicos imprescindibles: “Calcular, de manera intuitiva, el límite cuando $h \rightarrow 0$ de una función cuadrática con el uso de la calculadora como una distancia entre dos número reales” (Bachillerato General Unificado - Ministerio de Educación, 2017, pp. 1252-1283) (primer y segundo año de bachillerato) y “Conocer y aplicar el álgebra de límites de sucesiones convergentes en la resolución de aplicaciones o problemas con sucesiones reales en matemática financiera (interés compuesto), e interpretar y juzgar la validez de las soluciones obtenidas” (Ibídem) (tercer año de bachillerato); y, las siguientes destrezas con criterios de desempeño básicos deseables: “Identificar sucesiones convergentes y calcular el límite de la sucesión” y “Reconocer sucesiones numéricas reales que convergen para determinar su límite” (Ibídem). Es decir, subyace en el proyecto curricular vigente la prioridad del cálculo y la aplicación de propiedades de los límites, sobre la comprensión de este concepto matemático, aspecto que reafirmado en el tratamiento que se da al tema en los textos oficiales.

Cómo respuesta a los problemas que se generan en el proceso de enseñanza aprendizaje del concepto de límite de una función en un punto, se han desarrollado varias propuestas didácticas que intentan superarlos. Así, Mira, Valls y Llinares (2013) presentan la investigación “Un experimento de enseñanza sobre el límite de una función. Factores determinantes en una trayectoria de aprendizaje”, cuyo objetivo fue identificar características de la construcción del significado de límite de una función en estudiantes de bachillerato (16-17 años), los resultados de esta investigación determinan que la trayectoria de aprendizaje se ve condicionada por la coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango en diferentes tipos de funciones. Engler, Vrancken, Hecklein, Müller y Gregorini (2007) plantean la investigación “Análisis de una propuesta didáctica para la enseñanza de límite finito de variable finita” cuyo objetivo fue “analizar una secuencia de actividades en el aula de modo que los alumnos gestionen con sentido el conocimiento matemático para que resulte un conocimiento vivo (…) y además que sea funcional (…)”, esta investigación fue dirigida a estudiantes universitarios de carreras no Matemáticas, uno de los resultados de esta investigación señala la importancia de vivenciar el diseño y la ejecución de diferentes tareas de aula, así como comprobar y reconocer la importancia de estas como recursos para la enseñanza y para su propia formación. Camacho y Aguirre (2001) presentan los resultados de la investigación “Situación didáctica del concepto de límite infinito. Análisis preliminar” el objetivo de esta fue “diseñar una situación didáctica para introducir el concepto de límite infinito en el curso de Matemática I del nivel de enseñanza superior en las carreras de ingeniería del Sistema Tecnológico”, una de las conclusiones que sugiere la autora es la necesidad de reemplazar el uso de argumentos imprecisos por razonamientos matemáticos basados en operaciones con números reales, sucesiones y definiciones elementales de convergencia. Fernández (2000) desarrolló la investigación “Perfeccionamiento de la enseñanza-aprendizaje del tema límite de funciones con el uso de un asistente matemático”, esta propuesta didáctica busca resolver problemas detectados en la comprensión de límites de una función mediante la introducción de la Informática como recurso didáctico; como conclusión se establece que el uso de la informática mejorar la comprensión conceptual del límite y contribuye a realizar ejercicios y problemas de mayor complejidad de manera eficiente.

La problemática plantada permite evidenciar la necesidad de diseñar situaciones didácticas de enseñanza que contribuyan a superar las dificultades del proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto de límite.

En este contexto nos planteamos como problema de investigación determinar cómo usar los fractales para contribuir en la enseñanza aprendizaje de la concepción dinámica del concepto de límite de una sucesión y vencer las dificultades asociadas a este concepto. Para ello diseñamos tareas con base al análisis cualitativo de las características de los fractales y descripción de su proceso dinámico e iterativo de construcción del Conjunto de Cantor, Copo de nieve de Koch, Alfombra y Triángulo de Sierpinski. El fractal "es el resultado de aplicar una función a un punto y a lo obtenido volver a aplicársela y así sucesivamente" (Martínez, 2015, p. 10), este proceso permite representar sus dimensiones en la forma simbólica del límite. Las tareas diseñadas para la guía didáctica llevan suscritas los mecanismos y construcciones mentales de la Teoría APOE y la descomposición genética propuesta por Roa Fuentes y Oktaç (2014), como se presenta en la siguiente tabla.

Tabla 1. *Interpretación de la Descomposición Genética Aplicada al Límite de Sucesiones Mediante Fractales*

Mecanismo Mental	**Fractales**						
	Conjunto De Cantor	**Copo De Nieve De Koch**		**Alfombra De Sierpinski**		**Triángulo De Sierpinski**	
	Longitud	**Perímetro**	**Área**	**Perímetro**	**Área**	**Perímetro**	**Área**
INTERIORIZACIÓN Transforma la **Acción** de generar los primeros términos de una sucesión en un Proceso para determinar infinitos términos.	n tiende a ∞ a_n tiende a L	n tiende a ∞ a_n tiende a ∞	n tiende a ∞ a_n tiende a L	n tiende a ∞ a_n tiende a ∞	n tiende a ∞ a_n tiende a L	n tiende a ∞ a_n tiende a ∞	n tiende a ∞ a_n tiende a L
COORDINACIÓN Coordina los **Procesos de tendencia** de los términos de la sucesión con el proceso de tendencia de los números naturales que representan su ubicación.	Aumento de iteraciones con el aumento del número de segmentos	Aumento de las iteraciones con el aumento del número de Segmentos		Aumento de las iteraciones con el aumento del número de cuadrados		Aumento de las iteraciones con el aumento del número de triángulos	
	Aumento de iteraciones con la disminución de la longitud	Aumento de iteraciones con el aumento del perímetro	Aumento de las iteraciones con el aumento del área	Aumento de iteraciones con el aumento del perímetro	Aumento de iteraciones con la disminución del área	Aumento de iteraciones con el aumento del perímetro	Aumento de iteraciones con la disminución del área
ENCAPSULACIÓN Encapsula el Objeto matemático.	Escribiendo así: $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$	Escribiendo así: $\lim_{n\to+\infty} a_n = \infty$	Escribiendo así: $\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{8}{5}A_O$	Escribiendo así: $\lim_{n\to+\infty} a_n = \infty$	Escribiendo así: $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$	Escribiendo así: $\lim_{n\to+\infty} a_n = \infty$	Escribiendo así: $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

Fuente: *Roa Fuentes S. y Oktaç A. (2014) en Lima J. (2020).*

MATERIAL Y MÉTODOS

Este es un estudio descriptivo, de enfoque cualitativo. Se respalda en la revisión de resultados de investigaciones argumentadas en fuentes documentales que se complementó con una investigación de campo, en esta participaron 33 estudiantes de tercer año de bachillerato de la Unidad Educativa Municipal "San Francisco de Quito" durante el año lectivo 2020-2021.

El diseño de esta investigación se basa en cuatro etapas:

Primera etapa: elaboración de las actividades que se presentaron en la situación didáctica. Se desarrolló una investigación bibliográfica referente a los elementos y mecanismos de la descomposición genética del límite al infinito e infinito de una sucesión.

Se diseñaron 4 tareas de aprendizaje, los mecanismos de la teoría APOE, están suscritos a las tareas propuestas, en la Tabla 2 se expone la relación que existe entre las tareas de cada tarea y los elementos de la DG utilizada. Donde E0 corresponde a la idea de sucesión, E1, E2 y E3 representan a la Interiorización, Coordinación y Encapsulación, respectivamente, LF y LI simbolizan al límite finito y límite infinito.

Tabla 2. *Relación de Sub-tarea y Elementos de las Tareas 1, 2, 3 y 4*

	Sub-tarea	**Elementos Matemáticos**				**Límite**	
		E0	E1	E2	E3	LF	LI
Tarea 1	1.1	X					
	1.2 (a)		X				
	1.2 (b)			X		X	
	1.3 (1)			X			
	1.3 (2)				X		
Tarea 2	2.1	X					
	2.2 (a)		X				
	2.2 (b)			X			X
	2.3 (1)			X			
	2.3 (2)				X		
Tarea 3	3.1	X					
	3.2 (a)		X				
	3.3 (a)	X	X			X	
	3.3 (a1,2)			X			
	3.3 (b1)			X			
	3.3 (b2)				X		
Tarea 4	4.1 (b)	X					
	4.1 (b1)		X				
	4.1 (b2)			X		X	X
	4.2			X			
	4.3				X		

Fuente: *Lima J. (2020)*

Para la redacción de las tareas didácticas se diseñó una primera propuesta con indicadores redactados en algunos casos como afirmación y en otros como preguntas abiertas motivando de esta forma al estudiante a que reflexione su razonamiento y permitiendo al investigador analizar sus respuestas. La Tarea 1 consiste en construir el Conjunto de Cantor, formar los primeros términos de la sucesión tanto para el número de segmentos como su longitud, deducir la longitud del fractal de forma numérica y representarla en lenguaje matemático. La Tarea 2 consiste en analizar la construcción del Copo de Nieve de Koch, deducir su perímetro de forma numérica y representarla en lenguaje matemático. La Tarea 3 consiste en construir la Alfombra de Sierpinski, formar los primeros términos de la sucesión tanto para el número de cuadrados como para su área en función del área inicial, deducir el área del fractal y representarla en lenguaje matemático. La Tarea 4 consiste en analizar la construcción del Triángulo de Sierpinski, formar los primeros términos de la sucesión tanto para el perímetro como el área en función de sus medidas iniciales, deducir el perímetro y área del fractal y representarla en lenguaje matemático.

Segunda etapa: consistió en la validación que fue realizada mediante el juicio de expertos. Los mismos que son docentes en diferentes ramas de la educación con la finalidad de contar con sus observaciones y puntos de vista en pro de mejorar y enriquecer nuestro instrumento. En la Tabla 3 se observa los expertos que validaron el instrumento.

Tabla 3. *Expertos que Validaron la Guía de Observación*

Experto	Área	Lugar de Trabajo	Observación
PhD. Salvador Llinares, PhD. Julia Valls, PhD. Joan Pons	Investigación en Didáctica de la Matemática	Universidad de Alicante, España	Informe 20.09.2020.
Mg. Milton Coronel	Matemática	Universidad Central del Ecuador	Correcciones asociadas al concepto matemático de sucesiones.
MSc. Edwin Lozano	Investigación y Psicología	Universidad Central del Ecuador	Se verifica coherencia en el documento.
MSc. Narcisa de Jesús	Lengua y Literatura	U.E.M. Calderón	En un documento formal se debe evitar el uso de diminutivos.

Fuente: *Lima J. (2020)*

Las observaciones fueron aceptadas e incluidas en la propuesta inicial.

Tercera etapa: pilotaje de las tareas. En esta etapa participaron 33 estudiantes, de la Unidad Educativa Municipal "San Francisco de Quito" que actualmente se encuentran cursando el tercer curso de BGU paralelo C en el periodo académico 2020-2021, y cuyas edades oscilan entre los 17 y 18 años. Estos estudiantes en primero y segundo año de BGU, estudiaron el concepto de límite de una forma intuitiva, dinámica y únicamente de funciones. Referente al contenido de sucesiones, su estudio se ha enfocado en la aplicación de progresiones aritméticas y geométricas.

Esta etapa se desarrolló en tres sesiones de 40 minutos, mediante la plataforma Zoom. La primera sesión se realizó una introducción general y se presentó la Tarea 1 (construir el Conjunto de Cantor), la segunda sesión se desarrolló la Tarea 2 (analizar la construcción del Copo de Nieve de Koch) y la Tarea 3 (construir la Alfombra de Sierpinski), se envió como trabajo autónomo la tarea 4 (analizar la construcción del Triángulo de Sierpinski, y la tercera sesión se realizó la revisión de la tarea y el respectivo el refuerzo.

Durante el desarrollo de esta etapa se tomaron en cuenta las inquietudes de los estudiantes y se tabularon los resultados para determinar el porcentaje de estudiantes que desarrollaban de forma adecuada cada tarea.

Cuarta etapa: elaboración de una guía didáctica. En esta etapa se redactó un documento que recoge las observaciones de los expertos y los resultados del análisis del pilotaje.

RESULTADOS

Como resultado de la investigación se diseñó una guía didáctica para favorecer el proceso de enseñanza y aprendizaje de la concepción dinámica del concepto de límite de una sucesión mediante el uso de fractales. La guía didáctica consta de actividades de inicio (Lección 1: conceptos básicos), para el desarrollo de los contenidos (Lección 2: Conjunto de Cantor; Lección 3: Copo de Nieve de Koch; Lección 4: Alfombra de Sierpinski) y para evaluación (Lección 5: Triángulo de Sierpinski).

La tarea asociada al conjunto de Cantor aporta con el límite finito, el Copo de nieve de Koch aportan con el límite infinito. La Alfombra de Sierpinski aporta con el refuerzo del límite finito y finalmente, el Triángulo de Sierpinski aporta con los dos tipos de límites. Además, la guía está apegada al currículo vigente ecuatoriano, por ello cada lección contiene su destreza con criterio de desempeño, el objetivo y las aptitudes a desarrollar por los estudiantes, un resumen de la lección, los materiales requeridos, las tareas a realizar y sugerencias para el docente. La guía es de corte constructivista, por lo que cada lección y tarea contienen preguntas que posibilitan al estudiante construir el concepto de límite de una sucesión al infinito e infinito.

DISCUSIÓN

Con base en las tareas previas y posteriores a la aplicación del instrumento, se destaca que es posible utilizar los fractales Conjunto de Cantor y Triángulo de Sierpinski en el proceso de enseñanza - aprendizaje de la concepción dinámica del concepto de límite de una sucesión, ya que su proceso de construcción permite visualmente deducir la tendencia de sus dimensiones y comprender que la longitud del Conjunto de Cantor tiende a cero, el perímetro del Triángulo de Sierpinski tiende a infinito y su área tiende a cero.

Se destaca que los fractales que favorecen en mayor medida a la enseñanza de este concepto son el Conjunto de Cantor y Triángulo de Sierpinski, ya que su proceso de construcción permite visualmente deducir la tendencia de sus dimensiones y comprender que la longitud del Conjunto de Cantor tiende a cero $\left(\lim_{n\to\infty} L_n = 0 \equiv \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n L = 0\right)$, el perímetro del Triángulo de Sierpinski tiende a infinito $\left(\lim_{n\to\infty} P_n = \infty \equiv \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n P_O = \infty\right)$ y su área tiende a cero $\left(\lim_{n\to\infty} A_n = 0 \equiv \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n A_O = 0\right)$.

En las actividades propuestas se descartó el perímetro de la Alfombra de Sierpinski $\left(\lim_{n\to\infty} \left[4 + \left(\frac{8}{3}\right)^n\right] \frac{P_O}{5} = \infty\right)$ y el área del Copo de Nieve de Koch $\left(\lim_{n\to\infty} A_n = \frac{8}{5} A_O\right)$ ya que su deducción y representación en lenguaje matemático requiere de conocimientos más profundos en sucesiones.

REFERENCIAS

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. *Ingeniería didáctica en educación matemática*, *33*, 60.

Blázquez, S., y Ortega del Rincón, T. (2000). El concepto de limite en la educación secundaria. En Cantoral, R. (Ed.). *El futuro del cálculo infinitesimal*, 331-354. Grupo Editorial Iberoamérica.

Blázquez, S., & Ortega del Rincón, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME*, *4*(3), 219-236.

Camacho, S., y Aguirre, M. (2001). Situación didáctica del concepto de límite. Análisis preliminar. *RELIME*, *4*(3), 237-265.

Cornu, B. (1991). Limits. Em D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical thinkng*, 153-166. Kluwer.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K. y Vidakovic, D. (1996). Comprensión del concepto de límite: comenzando con un esquema de proceso coordinado. *Revista de comportamiento matemático*, *15* (2), 167-192.

Elia, I., Gagatsis, A., Pnaoura, A., Zachariades, T. y Zoulinaki, F. (2009). Geometric and algebraic approaches in the concepto of "limit" and the impacto f the "Didactic Contract". *International Journal of Science and Mathematics Education*, *7*(4), 765-790.

Engler, A., Vrancken, S., Hecklein, M., Müller, D., & Gregorini, M. (2007). Análisis de una propuesta didáctica para la enseñanza de límite finito de variable finita. *Union. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *11*, 113-132.

Fernández, M. (2000). Perfeccionamiento de la enseñanza-aprendizaje del tema límite de funciones con el uso de un asistente matemático. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME*, *3*(2), 171-187.

Flores, P., Lupiáñez, J. L., Berenger, L., Marín, A., & Molina, M. (2011). *Materiales y recursos en el aula de matemáticas*. Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Lima Yarpaz, J. J. (2020). *Los fractales en la enseñanza-aprendizaje de la concepción dinámica del concepto de límite de una sucesión: una propuesta didáctica para estudiantes de Bachillerato General Unificado (BGU)* (Bachelor's thesis, Quito: UCE).

Martínez, C. (2015). *Objetos fractales y Arquitectura* (Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Valencia, España).