Quintaesencia
Revista de Educación
ISSN 2076-5363 (en línea)

Quintaesencia [(2021), vol. 12, pp. 103 - 114]
DOI: https://doi.org/10.54943/rq.v12i1.41

Artículo en conferencia

V COLOQUIO BINACIONAL SOBRE LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA
V COBISEMAT

V Coloquio Binacional sobre la Enseñanza de las Matemáticas, Universidad Nacional de Tumbes, 28 y 29 de mayo de 2021 (V COBISEMAT)

La construcción de fórmulas: una articulación entre geometría y álgebra

The construction of formulas: an articulation between geometry and algebra

A construção de fórmulas: uma articulação entre geometría e álgebra

Maria José Ferreira da Silva [1, a]

[1] Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Brasil
[a] https://orcid.org/0000-0002-1249-8091

zeze@pucsp.br
maze.fsilva@gmail.com

Información

Recibido: 20/03/2021.
Aceptado: 28/05/2021.

Palabras clave:
geometría. Álgebra. Modelización algebraica. Aprehensiones de figuras.

Resumen

El objetivo de este artículo es realizar una reflexión teórica sobre dos Actividades de Estudio e Investigación - AEI, que se centran en la construcción de fórmulas para el cálculo de medidas de volumen. El primero trata de una fórmula para calcular la medida del volumen de un tetraedro regular construido a partir de un cubo y el segundo de una fórmula para calcular la medida del volumen de un octaedro obtenido al truncar un tetraedro regular. La reflexión se realizó a partir de una articulación entre geometría y álgebra a partir de las aprehensiones de una figura, en términos de Registros de Representación Semiótica y de las cuatro fases del proceso de modelización algebraica. El movimiento de construcciones geométricas, realizado en GeoGebra, junto con el lenguaje natural, permiten el desarrollo de aprehensiones de figuras, la percepción de relaciones entre partes de las figuras y la consecuente representación algebraica de las fórmulas buscadas.

Information

V COBISEMAT
Universidad Nacional de Tumbes

Keywords:
geometry, Algebra, Algebraic modeling, Apprehensions of figures.

Abstract

The objective of this article is to perform out a theoretical reflection on two Activities of Study and Research - AEI, which focus on the construction of formulas for the calculation of volume measurements. The first deals with a formula to calculate the volume measure of a regular tetrahedron constructed from a cube and the second deals with a formula to calculate the volume measure of an octahedron obtained by truncating a regular tetrahedron. The reflection was made from an articulation between geometry and algebra from the apprehensions of a figure, in terms of Records of Semiotic Representation and of the four phases of the algebraic modeling process. The movement of geometric constructions, carried out in GeoGebra, together with natural language, allow the development of apprehensions of figures, the perception of relationships between parts of the figures and the consequent algebraic representation of the formulas sought.

INFORMAÇÃO

Palavras-chave:
Geometria, Álgebra, Modelização algébrica, Apreensões de figuras

RESUMO

O objetivo deste artigo é fazer uma reflexão teórica a respeito de duas Atividades de Estudo e Investigação – AEI, que focam na construção de fórmulas para o cálculo de medidas de volume. A primeira trata de uma fórmula para calcular a medida do volume de um tetraedro regular construído a partir de um cubo e a segunda de uma fórmula para calcular a medida do volume de um octaedro obtido por truncamento de um tetraedro regular. A reflexão foi realizada a partir de uma articulação entre geômetra e álgebra baseada nas apreensões de uma figura, em termos de Registros de Representação Semiótica e das quatro fases do processo de modelização algébrica. A movimentação das construções geométricas, feitas no GeoGebra, juntamente com a linguagem natural, permitem o desenvolvimento das apreensões da figura, a percepção de relações entre partes das figuras e a consequente representação algébrica para as fórmulas procuradas

INTRODUÇÃO

A importância do ensino de Geometria vem sendo discutida há muito tempo, desde o casal Van Hiele em 1957 quando apontou que o aluno não compreende geometria, porque é ministrado em temas separados sem que a relação entre eles seja explicitada, de maneira a não permitir o entendimento do aluno e sem qualquer ligação com o mundo em que vive. Esses estudos culminaram, em 1984, com a teorização de Pierre Van Hiele de que o aprendizado em geometria segue cinco níveis de raciocínio ou de desenvolvimento: N0, visualização ou reconhecimento; N1, análise; N2, dedução informal; N3, dedução e N4, rigor. Durante a década de 1960, durante o Movimento da Matemática Moderna, Dienes defendeu o uso de material manipulativo como um meio de as crianças relacionarem o mundo em que vivem, com o mundo abstrato da matemática focando em jogos e publicando três livros: Topologia, geometria projetiva e afim; Geometria Euclidiana e Grupos e coordenadas. Parzysz na década de 1980, alerta para a importância do desenho na aprendizagem de geometria e em 2001 constrói um modelo, que articula a natureza dos objetos que estão em jogo com os modos de validação, em quatro etapas:G0, a geometria concreta, G1, a espaço-gráfica, G3, a proto-axiomática e G4, a axiomática. Em G0 e G1 (geometria não axiomática) os objetos são concretos e as justificativas e validações são perceptíveis, em G2 e G3 (geometria axiomática) os objetos são teóricos e as validações são dedutivas. O autor relaciona suas etapas com os níveis de Van Hiele, por um ponto de vista didático, em que considera que os níveis 0 e 1 ocorrendo em G0 e G1 e os níveis 3 e 4 em G2 e G3, concluindo que, o nível 2 de Van Hiele, “de certa forma constitui o nível de articulação entre esses dois tipos de geometria em que a teoria está em processo de se constituir no aluno.” (p. 100). Em 1998 Houdement e Kuzniak definiram três tipos de geometria: G1, geometria natural; G2, geometria axiomática natural e G3, geometria axiomática formalista. Na primeira a dedução é exercida com objetos materiais com a ajuda da percepção e da manipulação de instrumentos; na segunda se propõe uma axiomatização não formal, o mais precisa possível e na terceira, o raciocínio lógico se impõe. (Kuzniak, 2003). Para Pazysz (2001) a primeira “seria a geometria da escola elementar, a segunda a do ensino secundário e a terceira do ensino superior” (p. 100). Em 2003, Kuzniak define o espaço de trabalho geométrico que consiste de um conjunto de objetos em um espaço real e local; um conjunto de instrumentos e ferramentas a serviço do geômetra e um referencial teórico como modelo teórico com o objetivo de permitir a resolução de um problema geométrico pelo aluno.

Vemos diferentes referenciais com a mesmo objetivo, o ensino (foco na geometria) e a aprendizagem (foco no aluno) de geometria, muitos outros autores têm se dedicado à essa discussão. No Brasil, Pavanello (1993) já apontava o prejuízo aos alunos submetidos a um ensino que prioriza o ensino de uma álgebra mecanizada, em detrimento do ensino de geometria que poderia favorecer a análise de fatos, relações e dedução. A necessidade de um esforço para modificar o ensino da geometria elementar foi sugerido por Lorenzato (1995) ao constatar que professores que não haviam aprendido geometria, não saberiam como ensiná-la. Tal fato foi verificado por Silva, Manrique e Almouloud (2004) ao mostrar que dificuldades em lidar com diferentes situações em geometria impedem um processo de mudança de prática. Assim, os alunos, em situações de geometria, continuam apresentando baixo rendimento no Brasil.

Quanto ao ensino de álgebra ocorreu o mesmo, muitos autores se debruçaram para entender seu ensino e sua aprendizagem. Para Munzón, Bosch e Gascón (2015, p. 107) “a maioria das investigações didáticas a respeito de álgebra elementar centram-se em estudar as principais dificuldades dos alunos no início da aprendizagem e as possíveis atuações do professor (ou do ensino) para minimizá-las.” Os trabalhos de Chevallard (1984, 1989, 1990) e Gascón (1993, 1994, 1999) mostram que a álgebra escolar, apoiada em um contexto numérico ao ser trabalhada como aritmética generalizada, reduz as expressões algébricas ao papel de representar e manipular números desconhecidos (incógnitas) determinados por números conhecidos (dados) a reduzindo apenas ao cálculo algébrico.

Nesse sentido, Chevallard (1989) afirma que “a funcionalidade do cálculo algébrico como uma perspectiva de renovação curricular deve visar, desde cedo, a utilização de parâmetros, para conduzir à noção de fórmula (produção e exploração) e a noção de função”. Para o autor, as fórmulas são modelos funcionais construídos para estudar os objetos modelizados com base em relações funcionais entre variáveis. Concordando com Chevallard, para Gascón (1995) a álgebra não deve focar apenas em problemas aritméticos, mas ao estudo de campos de problemas que envolvam outras áreas da matemática, como é o caso da geometria e do desenho geométrico.

Assim, podemos concluir que um dos problemas da aprendizagem, tanto de álgebra, quanto de geometria é a qualidade de seu ensino. Entendemos que diversas situações geométricas podem propiciar a construção de modelos, com a utilização de parâmetros que, além de conhecimentos de geometria conduzem à compreensão do papel efetivo da álgebra nesse processo. No entanto, temos que considerar que "integrar a álgebra como instrumento de modelização na escola secundária requer uma mudança cultural que provoque mudanças significativas dos modelos epistemológicos e didáticos dominantes nas instituições escolares o que, obviamente, apresenta enormes dificuldades" (Munzón, Bosch e Gascón, 2015, p. 125). É nesse sentido que as pesquisas em Educação Matemática podem apontar alternativas para o ensino, Segundo Gascón (2003, p. 33) "a Didática da Matemática, como o resto das disciplinas teórico-experimentais (cada qual em seu âmbito), não pode renunciar à ambição de *explicar por que existe o que existe e porque não existe o que não existe* no âmbito das instituições didáticas. Sem isto, a didática seria apenas um catálogo perfeitamente inútil de descrições a posteriori.

Dessa forma, neste artigo, faremos uma breve relação entre algumas teorias que tratam da aprendizagem e do ensino de matemática, para então, baseados nelas, fazer uma análise teórica de duas Atividades de Estudo e Investigação, que envolvem o ensino de geometria por modelos algébricos, especificamente, o desenvolvimento de fórmulas para o cálculo de medidas de volumes. Cabe lembrar que o foco do ensino de poliedros nas escolas, como consequência da utilização do livro didático, foca no cálculo de medidas de comprimento, área e volume, a partir da memorização de fórmulas, muitas vezes sem as justificativas necessárias para que os alunos construam algum significado para elas.

MATERIAL E MÉTODOS

Para Vergnaud (1999, p.1) o professor não "é o único responsável pela aprendizagem que ocorre em sala de aula: os alunos têm sua parte no processo dinâmico produtor de efeitos de aprendizagem" e para produzir esse processo dinâmico deve estudar um conjunto de situações, um conjunto de conceitos e um conjunto de representações, ou seja, um campo conceitual, para compreender o desenvolvimento e a aprendizagem dos alunos, pois um conceito não se reduz apenas à definição de um objeto matemático. Esta teoria psicológica do conceito foca no processo de conceituação do aluno e permite analisar a relação entre conceitos, enquanto conhecimentos explícitos, e os invariantes operatórios implícitos nas condutas dos alunos quando atuam em uma situação. Enfim, como professores, temos que entender o que estamos buscando conceituar, construir classes de situações que conduzam os alunos a agir e a construir conhecimentos por conta própria. Nesse processo é importante ouvir e interpretar o que o aluno diz e escreve, porque é dessa forma que o professor identifica o significado que ele está construindo para o conceito em questão.

No entanto, quando falamos de situações temos que estar atentos às diferenças de seus significados de acordo com o teórico que utilizamos. A situação tratada por Vergnaud, não tem o mesmo sentido que as citadas por Brousseau, ou a noção de tarefa de Chevallard, embora todos orientem que elas devem permitir a ação dos alunos. De acordo com Vergnaud (1990, p. 11) "em princípio, toda situação pode ser reduzida a uma combinação de relações de base com dados conhecidos e desconhecidos, que correspondem a outras tantas questões possíveis".

Um ponto que recai na escolha das situações, a serem trabalhadas no ensino de algum conteúdo matemático, é a compreensão do professor a respeito da razão de ser de tal ensino. Gascón (2003) aponta que a escola básica esqueceu a razão do que busca ensinar, isto é, "por quê" e "para que" o estudo de determinado conteúdo na escola. Se nos detemos apenas na reprodução de modelos na escola, as discussões matemáticas não aparecem. Chevallard (1992), fazendo uma analogia a um ecossistema biológico, apresenta a noção de ecologia para mostrar que um objeto matemático não pode viver isolado, em uma instituição, mas fazer parte de um conjunto de saberes em que um garante a sobrevivência do outro. É neste sentido que procuramos relacionar o ensino de álgebra ao ensino de geometria, além de buscar razões de ser para seus ensinos.

Para Vergnaud (1998, p. 3), "quando os alunos começam a estudar álgebra com mais intensidade, eles, necessariamente, contam com a aritmética e, parte das operações algébricas encontra sua justificativa em relações aritméticas.” Já para Gascón (1994), a álgebra deve ser considerada como um meio de resolver problemas, não isolados, campos de problemas, não só aritméticos, mas em construções geométricas para as quais a solução algébrica represente globalmente as relações entre dados e incógnitas em que as letras podem representar incógnitas, número generalizado, variável ou parâmetro, o que conduz a um modelo algébrico. Nesse sentido, Bolea (2002) apresenta o processo de modelização algébrica em quatro etapas. A primeira consiste em determinar o sistema que será modelado, ou seja, a situação intra ou extra matemática que será estudada e que não possui respostas imediatas; a segunda, na construção do modelo baseada na identificação das variáveis que o caracterizam e de suas relações; a terceira etapa compreende o trabalho com o modelo para obter um modelo final que mostre as propriedades do sistema, sua interpretação e os resultados e, na quarta etapa, se amplia o conhecimento do sistema de estudo a partir de novos problemas. Bolea, Bosch e Gascon 2000, p. 139, especificamente, afirmam “que um trabalho matemático é algebrizado se puder ser considerado um modelo algébrico de outro trabalho matemático, o sistema a ser modelado” e para Chevallard (1989) a geometria é um excelente ponto de partida para conduzir o aluno ao papel modelizador da álgebra.

A escolha das situações cumpre parte do que é necessário para a conceituação, pois para Vergnaud (1990, p. 14) “são as situações que dão sentido aos conceitos matemáticos, mas o sentido não está nas próprias situações” Para o autor, uma representação simbólica, uma palavra ou um enunciado matemático pode ter sentido, ou vários sentidos ou sentido algum para certos indivíduos, porque a atividade linguística favorece a realização da tarefa e a resolução do problema, tendo em vista que favorece a representação dos elementos relevantes da situação, da ação e das relações entre a ação e a situação, ou seja, auxiliam na identificação dos objetos matemáticos decisivos para a conceituação (p. 18). Dessa forma, além da língua materna, tanto no estudo de álgebra, quanto de geometria necessitamos de representações simbólicas, ou seja, de representações algébricas e de representações figurais. Para Chevallard (1984) a atividade algébrica envolve atividades de simbolização (letras para designar quantidades desconhecidas, mas também parâmetros a fim de estudar soluções gerais) e o uso sistemático de sistema de signos na articulação entre vários registros semióticos.

Por outro lado, para Duval (2004) a conceituação depende da utilização de diferentes representações para um mesmo objeto matemático, além das transformações de tratamento e conversão que podemos realizar com uma representação. Para Duval (2006, p. 128) “o verdadeiro desafio de educação matemática é primeiro desenvolver a capacidade de alterar o registro de representação” porque “o papel principal dos signos não é representar objetos matemáticos, mas permitir a capacidade de substituir alguns signos por outros” (p. 106). Assim, “na verdade, as representações mentais úteis ou pertinentes à matemática são sempre representações semióticas interiorizadas.” (p. 126).

No caso da geometria, afirma que as principais funções das construções geométricas é visualizar, fazer ver, resumir informações e ajudar a provar e a conjecturar. Para o autor a figura é uma apreensão cognitiva porque depende da maneira como se olha para ela e por isso identifica quatro apreensões cognitivas para uma representação figural. A **perceptiva** que permite a identificação ou a interpretação imediata das formas de uma figura ou o reconhecimento de forma direta do objeto. A **discursiva** que permite interpretar e explicitar propriedades matemáticas da figura, além das que são dadas por uma legenda ou por hipóteses, em suma, permite a interpretação dos elementos da figura geométrica além do que está articulado nos enunciados em uma rede semântica de propriedades do objeto. A apreensão **sequencial** está associada à ordem seguida durante a construção de uma figura geométrica por meio de algum instrumento ou para a descrição de uma construção já realizada. Por fim, a apreensão **operatória** foca nas possíveis modificações ou transformações possíveis em uma dada figura e as reorganizações perceptivas que permitem novos elementos para solução de um determinado problema. O autor distingue três tipos de modificações para a apreensão operatória: a modificação **ótica** que permite aumentar, diminuir ou deformar uma figura a partir da produção de uma imagem da figura inicial (homotetia); a modificação **posicional** que desloca uma figura sem modificar medidas e forma (rotação, translação, ...) e a modificação **mereológica** que decompõe ou compõe uma figura a partir da relação parte-todo, em particular, a **reconfiguração** que consiste em reorganizar uma ou mais subfiguras diferentes de uma dada figura em outra figura e se apoia na percepção. (Duval, 2004).

Para o autor a resolução de um problema, em geometria, pode solicitar a articulação entre dois ou mais tipos de apreensão nomeadas de figura geométrica; visualização; heurística e demonstração, e a construção geométrica. A figura geométrica articula a apreensão discursiva com a apreensão perceptiva; a visualização as apreensões perceptiva e operatória, embora a apreensão perceptiva não exija conhecimento matemática ela pode comandar a apreensão operatória; a heurística e a demonstração articulam as apreensões operatória (subordinada à perceptiva) e a discursiva e, por fim, a construção geométrica que resulta da articulação entre as operações discursiva e sequencial que requerem a perceptiva.

Para o estudo de geometria Duval (2011, p. 92) sugere que "é preciso propor tarefas em que se exclua toda atividade de medida e de cálculo, pois para aprender a ver, os alunos devem aprender a trabalhar sem recorrer primeiro aos aspectos métricos" e, ainda, que as operações figurais são necessárias para poder aplicar fórmulas ou para aplicar uma propriedade.

Neste artigo buscamos conceituar medidas de volumes a partir do desenvolvimento de fórmulas para seus cálculos buscando percorrer os níveis de modelização e o trabalho com o registro algébrico e o registro figural. As situações, que apresentamos foram baseadas na noção de Atividades de Estudo e Investigação – AEI que é um modelo didático que propõe, segundo Bosch e Gascón (2010, p. 77) a reconstrução funcional dos conhecimentos matemáticos situando sua "razão de ser" ou seu "sentido" no centro do estudo. Esse modelo busca reformular os saberes para fazê-los viver no estudo de questões que são apresentadas aos alunos e na busca de suas respostas sob a direção do professor. Uma AEI tem início com a busca de uma questão problemática que deve ser refinada, por alunos e professor, durante um momento exploratório até que a resposta final seja obtida. Para Matheron e Noirfalise (2007) é necessário que o professor dê aos alunos a responsabilidade de buscar respostas, à questão proposta, fazendo-os sentirem que são os autores da matemática que será desenvolvida e que ela tem utilidade. Porém, reconhecem a existência de restrições à esse modelo didático impostas tanto por professores, quanto pelo sistema de ensino.

RESULTADOS

No que segue apresentamos as análises das questões das duas AEIs propostas, que podem ser adaptadas ou modificadas pelo professor de acordo com seus objetivos de ensino.

AEI 1: fórmula para o cálculo da medida do volume de um tetraedro regular obtido de um cubo.

A tarefa consiste em responder a questão: é possível construir uma fórmula para calcular a medida do volume de um tetraedro regular construído a partir de um cubo?

Essa situação envolve duas variáveis principais a medida da aresta do cubo e a medida da aresta do tetraedro e será produtora de outras questões e respostas até a obtenção de sua resposta. Para realizá-la o aluno deve conhecer o cubo, o tetraedro regular, ter alguma familiaridade com o software GeoGebra, mas desconhecer como se calcula a medida do volume de uma piramide. A primeira questão que pode surgir é **como construir um tetraedro regular baseado em um cubo?** Que dá origem a uma subtarefa que se cumpriria com a construção de um tetraedro regular, baseada em um cubo construído no software. Essa construção depende da percepção de que um tetraedro regular tem seis arestas congruentes e que o cubo tem seis faces congruentes, ou seja, do desenvolvimento de uma figura geométrica a partir da apreensão perceptiva e discursiva, para representar o tetraedro regular (figura 1) cujas arestas são as diagonais das faces do cubo. A percepção da figura comanda a atividade linguística, discurso, para fazer as relações necessárias a partir da situação e da ação do aluno. Pode ocorrer de algum aluno não perceber a relação entre as duas figuras ou não conseguir realizar a construção. Neste caso cabe ao professor lançar questões para estimular sua apreensão perceptiva (relações entre o cubo e o tetraedro) e, talvez, a apreensão sequencial lhe mostrando os passos da construção.

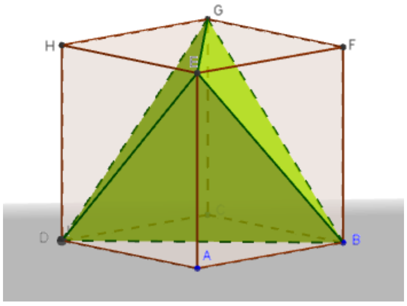

Figura 1: construção de um cubo qualquer e do tetraedro regular

A partir da construção deve surgir a questão: **como desenvolver uma fórmula para calcular a medida do volume desse tetraedro?** Para cumprir essa subtarefa é necessário, primeiro, relacionar partes do tetraedro regular e partes do cubo, possíveis por meio da visualização que articula a apreensão perceptiva e a operatória. Uma primeira reflexão vem da percepção de que o tetraedro pode ser decomposto em 4 pirâmides congruentes e da trissecção do prisma.

A apreensão perceptiva conduz ao discurso de que o tetraedro pode ser decomposto em 4 pirâmides congruentes e a apreensão operatória do tipo mereológica permite que ela seja construída, que expande o discurso para constatar que essas pirâmides são congruentes à pirâmide JKDE (manipulação no GeoGebra), sendo J, o ponto médio da aresta GE e K o ponto médio de AC (figura 2A), que ainda não conduz à resposta, mas a questionar, **se considerarmos o prisma triangular de base JHE, qual a relação dele com o cubo? E com o tetraedro?**

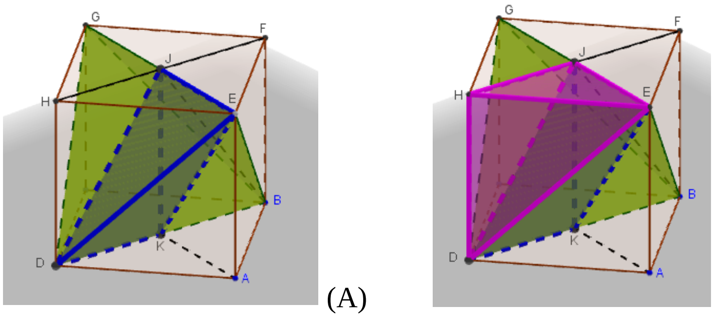

Figura 2: Estudo das relações entre o tetraedro regular e o cubo

Essas questões levam a buscar relações entre as partes do tetraedro regular e partes do cubo, possíveis por meio da visualização que articula a apreensão perceptiva para provocar o discurso de que o prisma é composto por três pirâmides de mesmo volume que JKDE e de uma justificativa para tal afirmação. A manipulação da representação feita no GeoGebra (figura 2B), permite ver que o prisma de base JHE representa um quarto do volume do cubo e a pirâmide JKDE está contida, tanto no tetraedro, quanto no prisma. Na realização destas construções o aluno mobiliza a apreensão perceptiva e a discursiva, para fazer as relações, além da apreensão operatória, do tipo mereológica, para decompor o tetraedro e compor o prisma, ou seja, articular visualização com figura geométrica.

Então, **qual seria a relação entre essa pirâmide e o prisma?** Espera-se uma apreensão discursiva, que permita afirmar que o prisma pode ser decomposto em três pirâmides: JKDE, HJDE e EKDA e a justificativa de que as pirâmides JEDH e EKDA têm mesmo volume, porque possuem as bases HJE e AKD congruentes e a mesma altura do prisma, portanto, têm mesmo volume. E, que as pirâmides HJDE e JKDE, também são congruentes, pois têm bases congruentes HJD e JKD (JD é diagonal da face JKDH do prisma) e têm mesma altura JE. Assim, podemos concluir que se $JEDH \equiv EKDA$ e $HJDE \equiv JKDE$ então $JKDE \equiv EKDA$.

Na busca de resposta à questão proposta, outra questão se apresenta **qual a relação entre o volume da pirâmide JKDE e o tetraedro regular?** Esta questão deve permitir o desenvolvimento de um discurso que afirme que essa pirâmide representa um quarto do tetraedro e ainda um terço de um quarto do cubo, que conduz à representação algébrica: $\frac{1}{4}V_T = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}V_C = \frac{1}{12}V_C$, considerando que V_T representa a medida do volume do tetraedro e V_C a medida do volume do cubo e, por um tratamento (mudança de variável), concluir que $V_T = 4 \times \frac{1}{12}V_C = \frac{1}{3}a^3$ sendo que a representa a medida da aresta do cubo. Neste ponto, com as conversões de uma representação figural, para um discurso na língua natural e desta para uma representação algébrica, que a álgebra começa a mostrar seu papel na construção do modelo para a situação apresentada, pois as expressões algébricas são identificadas como fórmulas ou modelos que, neste caso, dependem de construções algébricas e geométricas. Se, na escola, ficamos apenas na reprodução de modelos as discussões matemáticas não aparecem.

Uma outra solução, por truncatura do cubo, depende da percepção de que se pode obter o tetraedro regular construído, retirando 8 pirâmides com vértices em A, H, F e C congruentes à pirâmide AKDE que tem 1/12 do volume do cubo que, simbolicamente. pode ser representada por $V_{AKDE} = \frac{1}{12}V_C$. Por meio da apreensão discursiva pode-se concluir e representar que $V_T = V_C - 8V_{AKDE}$ e, portanto, $V_T = V_C - 8 \times \frac{1}{12}V_C = V_C - \frac{2}{3}V_C = \frac{1}{3}a^3$.

Nesta solução ocorrem as mesmas conversões e tratamentos da solução anterior, mas até aqui desenvolvemos uma fórmula para calcular a medida do volume de um tetraedro regular em função da medida da aresta do cubo que lhe deu origem. Logo, temos que generalizar essa fórmula para um tetraedro regular qualquer que gera o seguinte questionamento: **podemos construir uma fórmula para esse cálculo a partir da medida da aresta do tetraedro regular?**

As apreensões das figuras permitem observar e afirmar que, como todas as arestas do tetraedro regular são diagonais das faces do cubo, elas são congruentes e, portanto, se forem representadas por x, podemos dizer que $x = a\sqrt{2}$. Para obter a resposta, ao questionamento proposto, há que se proceder a uma mudança de variável, substituindo $a = \frac{x\sqrt{2}}{2}$ na fórmula anterior para obter $V_T = \frac{1}{3}a^3 = \frac{1}{3}\left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{x^3\sqrt{2}}{12}$ que permite calcular a medida do volume de um tetraedro regular a partir da medida de sua aresta.

Assim, construímos uma fórmula para calcular a medida do volume de um tetraedro regular, em função da medida de sua aresta que, em termos algébricos, solicitou a mobilização de um raciocínio funcional e a substituição de variáveis, pontos fundamentais no processo de construção de um modelo (fórmula), que vai além do cálculo algébrico, e da conceituação de volumes de sólidos, no entendimento de que as fórmulas resultam de construções geométricas e algébricas.

Neste ponto do trabalho, o professor pode institucionalizar a trissecção do prisma em pirâmides de mesmo volume e apresentar o princípio de Cavalieri ou associá-lo à situação, sem dispensar as demonstrações necessárias, bem como apresentar outras situações como dar um tetraedro regular qualquer e perguntar qual a medida da aresta do cubo que o gerou.

Para dar continuidade ao estudo, pode lançar uma nova questão: **se considerarmos agora, um tetraedro qualquer é possível obter uma fórmula em função de sua altura?** Aqui, observando as figuras e conclusões anteriores os alunos podem enunciar e mostrar que a medida do volume de um tetraedro qualquer (figura 3) é igual a um terço do produto da medida da área da base pela medida de sua altura. Baseando-se nas situações anteriores, podemos compor um prisma a partir de uma pirâmide qualquer e a trissecção do prisma e o princípio de Cavalieri permitem dar a à questão.

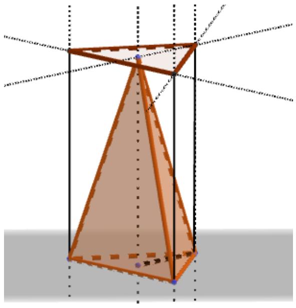

Figura 3: pirâmide qualquer e prisma

E para pirâmides de outros tipos, que não são triangulares? Considerando novas construções e as conclusões anteriores os alunos podem verificar que, uma pirâmide de base qualquer, pode ser decomposta em pirâmides triangulares e provar que a medida de seu volume pode ser obtida pelo produto da medida da área da base pela medida de sua altura, como comumente é feito no ensino.

Na realização das tarefas apresentadas até o momento o aluno mobilizou conhecimentos anteriores para construir novos conhecimentos que, por sua vez, devem ser mobilizados em outros tipos de situações, como é requerido na última fase do processo de modelização algébrica. Podemos então realizar a **AEI2**, com a questão: **dado um tetraedro regular qual a medida do volume do sólido que se obtém quando se faz sua truncatura a partir dos pontos médios de suas arestas?**

Essa situação deve conduzir os alunos a realizarem a construção da figura 4, por meio da apreensão operatória do tipo mereológica, e perceber que, a princípio, o novo sólido é obtido pela retirada de 4 tetraedros congruentes ao tetraedro EFGD que tem arestas medindo $\frac{x}{2}$, sendo x a medida do tetraedro regular inicial, ou seja, $V_S = V_T - 4V_t$ em que V_S representa a medida do volume do novo sólido, V_T representa a medida do volume do tetraedro inicial e V_t a medida do volume dos tetraedros retirados, isto é, $V_S = \frac{x^3\sqrt{2}}{12} - 4 \times \left(\frac{x}{2}\right)^3 \frac{\sqrt{2}}{12} = \frac{x^3\sqrt{2}}{24}$, ou seja tem a metade da medida do tetraedro regular inicial.

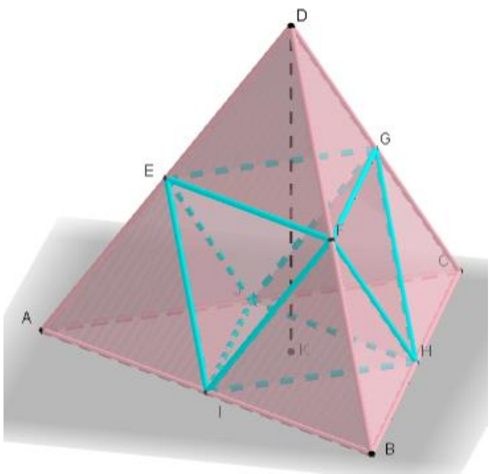

Figura 4: truncatura do tetraedro regular

Os resultados das situações anteriores e as apreensões perceptiva e operatória conduzem à construção da figura e à afirmação de que o novo sólido tem a metade do volume do tetraedro inicial e à novas questões: **que sólido resultou dessa truncatura? Qual a fórmula para calcular a medida de seu volume em função de sua aresta?**

A manipulação da representação no GeoGebra permite verificar que o sólido resultante é um octaedro regular e, ainda que, representando a medida de sua aresta por y, sabemos que $x = 2y$ e, portanto, $V_O = \frac{\sqrt{2}}{24}(2y)^3 = \frac{\sqrt{2}}{3}y^3$. O professor pode pedir a validação desse resultado questionando: **podemos verificar**

esse resultado, considerando que um octaedro é formado por duas pirâmides de base quadrangular?

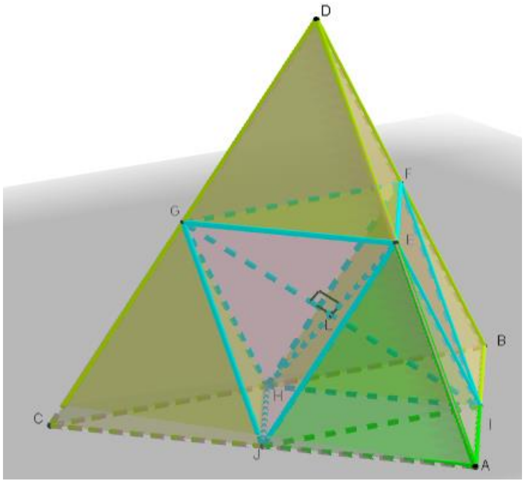

Figura 4: Octaedro regular obtido pela truncatura do tetraedro regular

Neste caso, a base quadrangular tem lado medindo y, porque são arestas do octaedro e, observando o triângulo retângulo GLE (figura 5), temos que EL representa metade da diagonal do quadrado e tem mesma medida que GL, logo a altura da pirâmide mede $GL = y\frac{\sqrt{2}}{2}$. Assim, a medida do volume do octaedro é dada por $V_O = 2 \times \frac{1}{3}y^2 \times y\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{y^3\sqrt{2}}{3}$.

Essas situações podem gerar outras questões para familiarizar os estudantes com os novos conhecimentos como, por exemplo, associar as medidas de áreas das superfícies desses sólidos em situações de construção de embalagens de capacidades determinadas.

Pudemos ver por essas AEIs uma relação estreita entre geometria e álgebra que mostram a importância de se ampliar o ensino de geometria para além da memorização de fórmulas e o ensino de álgebra, para além do cálculo algébrico, com a utilização de parâmetros para a produção e exploração de fórmulas e a mudança de variáveis para o desenvolvimento do pensamento funcional.

Em termos geométricos vimos a importância das apreensões da figura para a construção de conhecimentos em momentos de exploração e ainda a possibilidade de trabalhar com a álgebra focando em problemas de outras áreas, como afirma Gascón (1995). Em termos do processo de modelização cumprimos suas etapas quando escolhemos uma situação intra-matemática que questiona, a princípio, a construção de uma fórmula para o cálculo da medida do volume de um tetraedro regular construído a partir de um cubo, em que as variáveis são a medida da aresta do cubo e a medida da aresta do tetraedro regular. Na sequência, as relações entre essas variáveis permitiram construir um modelo algébrico para calcular a medida do volume do tetraedro em função da medida da aresta do cubo e da medida de sua aresta. A interpretação desses resultados conduziu a enunciar outros problemas como a truncatura do tetraedro regular.

Esperamos que as situações aqui trabalhadas inspirem professores a buscarem outros caminhos para o ensino e, neste sentido, outros exemplos, do tipo aqui tratado, podem ser encontrados em Silva e Almouloud (2013) quando buscam a medida do volume de um octaedro regular obtido por truncatura em um cubo e por relações entre suas partes, em que concluem que o octaedro tem um sexto da medida do volume do cubo e, generalizam, esse resultado para obter a medida do volume do octaedro em função da medida de sua aresta. Na sequência, os autores introduzem a construção de uma fórmula para o cálculo da medida do volume de um cuboctaedro obtido a partir do octaedro.

Nesse mesmo sentido, Silva, Gaita e Salazar (2017) analisam uma praxeologia matemática para a construção dessa fórmula, mas baseadas em um cuboctaedro obtido por truncaturas de um cubo, com foco nos níveis de algebrização e modelização, em uma formação continuada de professores. Esta situação foi verificada experimentalmente, com alunos do quarto ano do secundário (14 anos), por

Gellimmer Gutierrez Castillo, em sua investigação de mestrado ainda não defendida na Universidad Nacional de Piura, em que mostra que os alunos chegaram à fórmula e que o GeoGebra foi fundamental para esse resultado. Almeida e Silva (2016) apresentam o estudo do octaedro truncado construído com o *software* Cabri 3D e Silva (2020) tratando de relações entre geometria e álgebra discute a resolução geométrica de equações quadráticas. Com relação à construção de modelos planos de pirâmides temos Silva e Almouloud (2018, 2020).

Embora, alguns possam questionar o tempo para o desenvolvimento desse trabalho, a construção de conhecimentos e os ganhos cognitivos dos alunos conduzem a serem mais produtivos e autônomos em situações futuras.

DISCUSSÃO

As Atividades de Estudo e Investigação aqui apresentadas mostram que podemos relacionar geometria e álgebra, tanto para o desenvolvimento do pensamento geométrico quanto do algébrico. Mostra ainda que é possível trabalhar efetivamente a álgebra, para além do cálculo algébrico, a partir de problemas de outras áreas, matemáticas ou não, pois as questões poderiam estar relacionadas a algum problema da realidade. Outra questão importante que pode ser verificada nas situações é a construção de relações geométricas sem interferência da métrica, ou seja, do tratamento numérico, que é comum no ensino quando enfatiza a mudança de unidades de medida, sem se preocupar com as características da grandeza propriamente dita. No caso, dos sólidos, por exemplo, as grandezas capacidade e volume se confundem sem que o aluno perceba suas diferenças e a dependência da medida (número) da escolha da unidade, que o levaria a perceber, em particular, que podemos ter dois sólidos de mesmo volume representados por medidas diferentes.

O papel da linguagem natural para a construção de um discurso que descreva as relações construídas a partir das apreensões das figuras têm importância, tanto na aprendizagem geométrica quanto algébrica, porque permitem o desenvolvimento da ação e autonomia dos alunos que, por sua vez, permitem a vivência de parte da conceituação de volumes e capacidade, e das etapas do processo de modelização algébrica. Esse processo nos mostra a álgebra em seu papel de modelar uma situação, neste caso, com a construção de uma fórmula, que pode ser ampliado para outros sólidos ou outras situações. O importante é que as situações conduzam os alunos à ação na busca de respostas, que não podem ser imediatas, por mobilização de conhecimentos já adquiridos na procura de um modelo algébrico (fórmula), ao contrário do que, em geral, acontece no ensino, quando apenas realizam cálculos numéricos ou algébricos na busca de uma medida específica.

Fica evidente ainda, nos momentos de exploração da situação, o papel das apreensões das figuras na construção dos conhecimentos de cada aluno, porque elas são construídas ou mobilizadas individualmente, pois os alunos não veem a mesma figura da mesma forma. É aqui que entra o papel de mediador do professor para a construção de conhecimento.

A importância do dinamismo das representações construídas no GeoGebra é incontestável, principalmente, no estudo de sólidos geométricos, porque permite olhar para a figura de diferentes pontos de vista e medidas.

Enfim, temos que nos questionar a respeito do que se ensina e não focar apenas nas dificuldades dos alunos, ou seja, por que eles têm dificuldades? Como estamos ensinando? Ou seja, voltar a Gascón (2003) *por que existe o que existe e porque não existe o que não existe?*.

REFERÊNCIAS

Almeida, T. C. S.; Silva, M. J. F. (2016). Estudo do octaedro truncado em um ambiente de geometria dinâmica. XIII Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM, 1-12.

Bolea, P. (2002). El processo de algebrización de organizaciones matemáticas escolares. Tese (Doutorado). Universidad de Zaragoza, España.

Bolea, P.. Bosch, M.; Gascon, J. (1999). The role of algebraization in study of a mathematical organization. Proceedings of *CERME I*, Group 6, 35-145.

Bosch, M.; Gascón, J. (2010). Fundamentación de las organizaciones didácticas: de los “talleres de prácticas matemáticas” a los “recorridos de estúdio e investigación”. IUFM de l´Académie de Montpellier, 55-91.

Chevallard, Y. (1984). Le passage de l´arithmetique a l´algebrique dans l´ensegnement des mathematiques au college. Premiere partie, l´evolution de la transposition didactique. *Petit X*, 5, 51-94.

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l´arithmetique a l´algebre dans l´ensegnement des mathematiques au college. Deuxieme partie, perspectives curriculares: la notion de modelisation. Petit X, 19, 43-72.

Chevallard, Y. (1990). Le passage de l´arithmetique a l´algebrique dans l´ensegnement des mathematiques au college. Troisième partie. Petit X, 23, 5-38.

Chevallard, Yves (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. Recherches en Didactique des Mathématiques. Grenoble: La Pensée Sauvage, v. 12.1, p. 73-112.

Duval, R. (2004). Semiosis y Pensamento Humano. Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales. Edición en castellano. Traducción: Myriam Vega Restrepo. Segunda edición, Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática, Cali, Colombia.

Duval, R. (2006). A cognitive análisis of problems of comprehension in a learning of mathematics.Educational Studies in Mathematics, 61, 103-131, 2006.

Duval, R. (2011). Ver e ensinar matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar os registros de representação semiótica. São Paulo: PROEM.

Gascón, J. (1993). Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico. Del patrón análisis-sintesis ala génesis del lenguaje algebraico. Recherches em didactique des mathématiques. *13*(3), 295-332.

Gascón, J. (1995). Un nouveau modele de l´algèbre élémentaire comme alternative a l´aritmétique généralisée”. Petit x, 37, 43-63.

Gascón, J. (1999). La naturaliza prealgebraica de la matemática escolar. *Educación matemática*, *11*(1), 77-88.

Gascón, J. (2003). Efectos del autismo temático sobre el estudio de la Geometría en Secundária. I. Desaparición escolar de la razón de ser de la Geometría. *SUMA*, 44, 25-34

Lorenzato, Sérgio (1995). Por que não ensinar Geometria? *A Educação Matemática em Revista*, São Paulo, n. 4, 3-13.

Matheron, Y.; Noirfalise, R. (2007). Une recherche de la Comission inter-IREM (CII) didatique soutenue par l´INRP: “Dynamiser l´étude des mathématiques dans l´enseignement secondaire (collège et lycée) para la mise en place d´AER et de PER”

Munzón, N.; Bosch, M.; Gascón, J. (2015). El problema didáctico del algebra elemental: Un análisis macroecológico desde la teoría antropológica de lo didáctico. REDIMAT, *4*(2), 106-131.

Silva, M. J. F. (2020). Geometría y ecuaciones cuadráticas de una incógnita: análisis de una construcción. Actas CIEM 2020, X Congreso Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas. PUC-P, 91-101.

Silva, M. J. F.; Almouloud, S. A. (2013). Estudo de uma organização didática para construção de fórmulas para a medida de volume de sólidos. In: CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, CIBEM, VII, Montevideo, Uruguay, Actas (ISSN 2301-0797), 7658-7665.

Silva, M. J. F.; Almouloud, S. A. (2018). Um Modelo Epistemológico de Referência para o estudo da planificação de superfícies de pirâmides triangulares. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, *20*(3), 327-346.

Silva, M. J. F.; Almouloud, S. A. (2020). Atividades de Estudo e Investigação para a construção de modelos de pirámides triangulares. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Sección 2, *33*(1), 410-420.

Silva, M. J. F.; Gaita, C.; Salazar, J. V. F. (2017). A articulação entre geometría e álgebra na construção de fórmulas para o cálculo de medidas de volumen. *Revista Educação Matemática em Foco*, *6*(1), 4-20.

Silva, M. J. F.; Manrique, A. L.; Almouloud, S. A. (2004). Possíveis mudanças de postura em professores do ensino fundamental trabalhando com geometria. *Anais do VII Encontro Nacional de Educação Matemática*, Recife.

Parzysz, B. (1989). *Représentations planes et enseignement de la géométrie de l´espace au lycée. Contribution à l´étude de la relation voir/saboir*. These de doctorat. Université Paris VII. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01251157/document

Parzysz, B. (2001). Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique en PE1. Actes de XXVIIIème Colloque Inter-IREM des formateurs et professeurs de mathématiques chargés de la formation des maîtres. IREM d´Orléans-Tours.

Pavanello, R. M. (1993). O Abandono do ensino da Geometria no Brasil: causas e conseqüências. *Zetetiké*, n.1, 7-17.