Quintaesencia
Revista de Educación
ISSN 2076-5363 (en línea)

Quintaesencia 2021;12: 19-26
DOI: https://doi.org/10.54943/rq.v12i1.25

Artículo original

Función exponencial: análisis del trabajo matemático de estudiantes de humanidades

Exponential function: analysis of the mathematical work of humanities students

Jorge Luis, Vivas Pachas[1,a] Jesús Victoria Flores Salazar[2,b]

[a] Pontificia Universidad Católica del Perú. Lima, Perú jorge.vivas@pucp.edu.pe
[a] ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7739-830X
[2] Pontificia Universidad Católica del Perú. Lima, Perú jvflores@pucp.pe
[b] ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0036-140X

Información

Recibido: 14/03/2021.
Aceptado: 26/05/2021.

Palabras clave:

Función exponencial, Trabajo Matemático, Génesis del Espacio de Trabajo Matemático, Planos verticales del ETM.

Resumen

El presente reporte de investigación, presenta un recorte de la tesis de maestría del primer autor; tiene como objetivo analizar el trabajo matemático de estudiantes de carreras de humanidades cuando resuelven una tarea sobre función exponencial. Para ello, nos fundamentamos en la teoría del Espacio de Trabajo Matemático (ETM) y tomamos el método del ETM para el análisis. La investigación se realizó con estudiantes del primer ciclo de carreras de humanidades (16 y 18 años) de una universidad privada de Lima-Perú, en la que se elaboró una tarea sobre función exponencial. En base al análisis de las acciones matemáticas, se evidencia la activación de las génesis semiótica, instrumental y discursiva, siendo las génesis semiótica y discursiva las más frecuentes. Asimismo, se evidencia la activación de dos planos verticales el semiótico-discursivo y el instrumental-discursivo del ETM.

Information

Keywords:

Exponential function, Mathematical work, Genesis of Mathematical Workspace, Vertical planes of Mathematical Workspace.

Abstract

The research report, which is a summary of the first author's master's thesis, aims to analyze the mathematical work of students in humanities majors when they solve a task on the topic of exponential function. For this purpose, we are based on the theory of the Mathematical Workspace (MWS) and we use the MWS method for the analysis. The research was carried out with students of the first cycle of humanities careers (16 and 18 years old) of a private university in Lima-Peru, in which a task of the exponential function topic was elaborated. Based on the analysis of the mathematical actions, the activation of the semiotic, instrumental and discursive genesis is evidenced, being the semiotic and discursive genesis the most frequent. Likewise, the activation of two vertical planes, the semiotic-discursive and the instrumental-discursive of the ETM, is evidenced.

INTRODUCCIÓN

Dado el interés por comprender el trabajo matemático de estudiantes de carreras de humanidades cuando resuelven una tarea sobre función exponencial, se realizó un levantamiento bibliográfico en el que se identificó investigaciones como las de Brucki (2011) que tiene como objetivo analizar como una actividad relacionada con función exponencial favorece el aprendizaje de la función exponencial. Los sujetos de la investigación fueron catorce estudiantes brasileños de primer año de nivel secundaria. La actividad fue llevada a cabo en dos clases con una duración de 50 minutos cada una y tenía como foco relacionar el modelo algebraico de función exponencial con el modelo de término general de la progresión geométrica.

La metodología de la investigación de Brucki (2011) es cualitativa y la actividad se desarrolló empleando la progresión geométrica en la construcción del concepto de función exponencial. Entre las conclusiones más importantes de la investigación, la autora afirma lo siguiente: para que las actividades extra-matemáticas favorezcan el aprendizaje, éstas deben contener ideas claras, esto, debido a que, durante el desarrollo de la actividad, se percibió que algunos estudiantes no lograban fundamentar el concepto de función y/o el concepto de progresión geométrica.

También se considera la investigación de Sureda y Otero (2013), que analiza la conceptualización en el aprendizaje de la función exponencial. La investigación se sustenta en la Teoría Antropológica de lo Didáctico y en la Teoría de los Campos Conceptuales. En el análisis de la Actividad de Estudio e Investigación (AEI) se muestra la tendencia de los estudiantes de nivel superior en resolver problemas no lineales como si lo fueran, generando dificultades relacionadas con la enseñanza de variaciones no lineales. En ese sentido, las investigadoras consideran que la enseñanza de función exponencial necesita de un diseño de situaciones que articulen más de un sistema de representación. Las autoras planificaron, diseñaron, implementaron y analizaron, en conjunto, situaciones constituidas en cinco sistemas de representación diferentes con la finalidad de reconstituir el campo conceptual de la función exponencial para estudiantes de cuarto año de nivel secundario. Posteriormente, las investigadoras afirman que la investigación realizada no les proporciona los subsidios necesarios para afirmar que el proceso de conceptualización, particular en cada estudiante, atraviesa inevitablemente por cada una de las etapas que ellas identificaron en la investigación. Sin embargo, concluyeron que la explicitación, discusión y formalización de los conceptos, en cada sistema de representación, tienen vital importancia en la transformación de la etapa lineal a la etapa exponencial.

Por otro lado, el trabajo de Kuzniak, Tanguay, Vivier, Mena y Montoya (2016) presenta un estudio que se profundiza en el ETM personal y en los paradigmas de profesores en formación inicial de Chile y Francia en relación a la construcción de la función exponencial. En la formación inicial de profesores, tanto en Chile como en Francia, la función exponencial es estudiada en diferentes cursos orientados a diferentes objetivos. Los investigadores tienen por objetivo entender de qué manera los saberes en el ETM de referencia son organizados por los programas de estudio y la influencia que esta organización ejerce en el ETM idóneo. Los autores afirman que “Nuestra experiencia como formadores nos hace pensar que es difícil integrar las dimensiones de la función exponencial, que son tratadas en forma parcelada; y el ETM personal de los profesores en formación, en el caso de la función exponencial, está desarticulado” (p.52).

En conclusión, las investigaciones presentadas (Brucki, 2011; Sureda y Otero, 2013; Kuzniak *et al*., 2016) justifican la pertinencia de la investigación sobre la enseñanza y aprendizaje de la función exponencial. Además de ello, el tema es pertinente porque en carrearas de humanidades de diferentes universidades del Perú, se contempla el estudio de función exponencial. Por ejemplo, en los planes de estudio de la Universidad Tecnológica del Perú (UTP), Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas (UPC) y Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP) el concepto de función exponencial está presente.

Para analizar el trabajo matemático que realizan estudiantes de carreras de humanidades, al desarrollar una tarea sobre función exponencial, se presentan a continuación, aspectos de la teoría del Espacio de Trabajo Matemático-ETM.

Aspectos de la teoría Espacio de Trabajo Matemático-ETM

Kuzniak, Tanguay y Elia (2016) consideran que el trabajo matemático que realiza el estudiante le permite la construcción de su propio conocimiento sobre la matemática. Sin embargo, afirman que este proceso es gradual, interactivo y complejo; también sostienen que la evolución de los conocimientos matemáticos dependerá de las tareas propuestas y de las actividades que el estudiante realice para resolverlas. En relación con las nociones básicas del ETM, la investigación de Kuzniak, Montoya-Delgadillo y Vivier (2015) presenta las nociones de paradigma, dominio, trabajo matemático y tarea. Explicitando que paradigma es el conjunto de creencias, técnicas y valores que comparte un grupo científico; dominio matemático es determinado según la naturaleza de los objetos estudiados y de los paradigmas que lo caracterizan, por ejemplo, dominio de geometría, álgebra, aritmética, análisis, etcétera.; trabajo matemático consiste en resolver problemas matemáticos, identificar problemas y organizar contenidos dentro de un dominio específico.

También, indican que en el ETM se articulan los planos epistemológico y cognitivo, a través de las génesis originadas por el trabajo matemático. La génesis semiótica es el proceso asociado a los signos y representamen (o significantes), y que representa la relación dialéctica entre la sintáctica y las perspectivas semánticas sobre los objetos matemáticos, desarrollado y organizado mediante sistemas semióticos de representación. La génesis instrumental permite hacer a los artefactos operativos mediante los procesos de construcción que contribuyen a alcanzar el trabajo matemático y; la génesis discursiva utiliza las propiedades del sistema de referencia teórico para ponerlas al servicio del razonamiento matemático y para una validación no solamente icónica, gráfica o instrumental.

Además, Kuzniak y Richard (2014) identificaron tres planos verticales en el ETM (ver figura 1) cada uno de los cuales está definido por la interacción de dos génesis: semiótica e instrumental [Sem-Ins]; instrumental y discursiva [Ins-Dis] y, semiótica y discursiva [Sem-Dis].

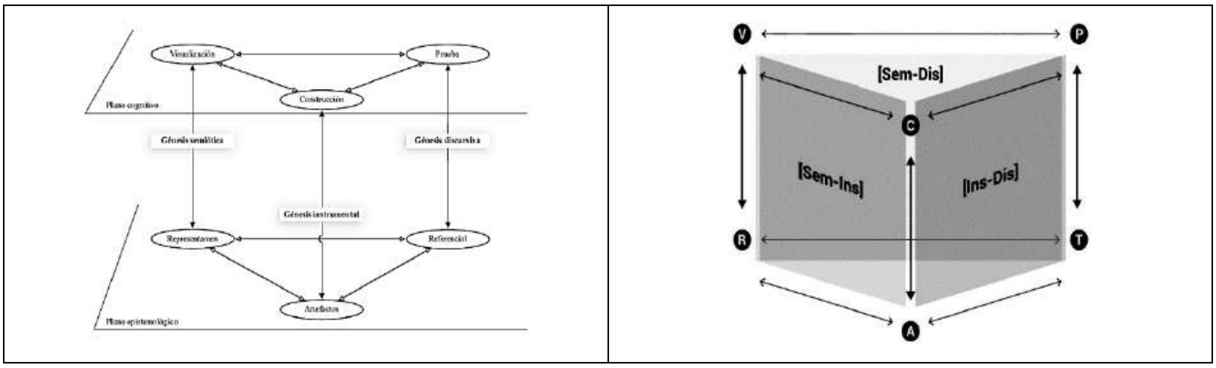


Figura 1. *Modelo ETM* / Kuzniak y Richard (2014, p. 21) y Kuzniak, Tanguay y Elia (2016, p.726)

Con relación a los planos: [Sem-Ins] asociado a una génesis semiótica y a la génesis instrumental. Existen dos formas de trabajo, una orientada hacia la construcción de los resultados (figuras, gráficos) y la otra hacia la interpretación de los datos brindados por los artefactos; [Ins-Dis] asociado a una génesis discursiva de la prueba y a la génesis instrumental y, [Sem-Dis] asociado a las génesis semiótica y discursiva, en el cual se distinguen los razonamientos argumentativos. Por otro lado, el trabajo matemático es caracterizado por sus respectivos paradigmas.

En ese sentido, Montoya y Vivier (2016) definen los tres paradigmas del dominio del Análisis: Análisis Aritmético-Geométrico (AG), que permite interpretaciones y suposiciones implícitas sobre la base de la Geometría o el mundo real; Análisis Calculatorio (AC), en el cual las reglas del Cálculo son algo explicitas, pero no resulta necesario reflexionar sobre su naturaleza y; Análisis Real o infinitesimal (AR), que involucran aproximación y vecindad, incluso topológico.

MATERIAL Y MÉTODOS

La investigación, que forma parte realizada es cualitativa y consta de una parte experimental que se llevó a cabo con estudiantes del primer ciclo de carreras de humanidades de una universidad privada de Lima-Perú. En la sesión participaron, además de los 57 estudiantes (16 y 18 años), el profesor (formador) y dos profesores asistentes (observadores). Para el presente reporte de investigación, que es un recorte de la investigación de Vivas (2021), se analiza la producción de un estudiante al que llamaremos Guido, quien desarrolla la tarea de forma individual en un tiempo aproximado de 40 minutos.

Para el análisis del trabajo matemático de Guido se utiliza el análisis descendente del método diseñado por Kuzniak y Nechache (2018), quienes consideran que:

> El análisis descendente consiste en dividir la actividad de una persona durante la realización de una tarea en una serie de acciones matemáticas. Estas acciones se analizan en detalle utilizando herramientas de la teoría de los ETM y se describen utilizando los diferentes componentes del

> diagrama de los ETM. Estas acciones y su interpretación en la teoría de ETM se resumen en una tabla de doble entrada que permite seguir paso a paso, en el tiempo, la realización de la tarea y la circulación del trabajo matemático a través de los diferentes planes del ETM. (p.8).

Los autores señalan que la acción matemática es objetivada y tomada del discurso escrito (producción escrita) u oral (entrevista, etc.) y que un episodio está constituido por una serie de acciones matemáticas que el estudiante realiza para llevar a cabo una tarea.

La tarea y su análisis

La tarea (ver figura 2) sobre función exponencial consta de dos preguntas. Para efectos del presente reporte se analizará la pregunta 1 de la tarea.

Pregunta 1

Esboce la representación gráfica de la función $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$ con $x \in \mathbb{R}$. Indique su rango, su asíntota e sus interceptos con los ejes coordenados.

Figura 2. *Tarea-pregunta* 1 / Vivas (2021, p. 41)

El objetivo de la pregunta 1 se presenta en la siguiente tabla:

Tabla 1. *Pregunta 1-objetivo y características*

Pregunta	Objetivo	Detalle
1	Representar gráficamente una función exponencial a partir de su representación algebraica.	La representación de la función permitirá evidenciar la activación del plano vertical [Sem-Ins] y la activación del plano vertical [Sem-Dis].

RESULTADOS

Análisis de la producción esperada

A partir de la identificación de la regla de correspondencia de f, se espera que reconozcan la representación algebraica de una función exponencial de la forma $f(x) = C \cdot a^x + k$. Es decir, que los estudiantes activen como referencial la regla de correspondencia de f para impulsar la activación de la génesis semiótica. Además, que reconozcan y grafiquen la recta horizontal que representa la asíntota de la gráfica de f a partir de la identificación del valor del parámetro que aparece dentro de su regla de correspondencia ($f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + \mathbf{1}$). Se espera que los estudiantes activen la génesis semiótica y realicen un proceso de visualización, cuando reconozcan la ecuación de la recta horizontal que representa su asíntota ($\mathcal{L}: y = 1$) y que a partir de la identificación del parámetro que aparece dentro de su regla de correspondencia ($f(x) = \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)^x + 1$), reconozcan que f es estrictamente decreciente. En términos de ETM, se espera que activen la génesis semiótica cuando tomen como representamen el valor de la *base* y realicen un proceso de visualización al reconocer la monotonía de f. En seguida, se espera que los estudiantes elaboren una tabla que contenga algunos valores para f. Esto evidenciará la activación de la génesis instrumental al tomar como artefacto simbólico la regla de correspondencia de f, por consiguiente, la activación del plano vertical [Sem-Ins].

También, a partir de la representación tabular de f, es posible que representen gráficamente los puntos obtenidos, lo que activaría la génesis instrumental. Igualmente, podrían graficar una curva que contenga todos los puntos de paso (ver figura 3).

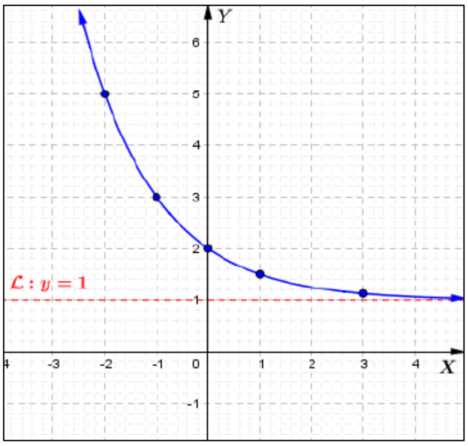


Figura 3. *Representación gráfica de f* / Fuente: Vivas (2021, p. 47)

En términos del ETM, se espera que activen la génesis discursiva debido a que el referencial es el dominio de f ($Dom(f) = \mathbb{R}$). También se piensa que los estudiantes activarán la génesis semiótica cuando tomen como referencial la regla de correspondencia de f o su representación gráfica para determinar que la ecuación de su asíntota es $y = 1$.

Además, a partir de su representación gráfica, se piensa que los estudiantes determinarán el intervalo $]1; +\infty[$ que representa el rango de f. En términos del ETM, se espera que se active la génesis semiótica al tomar la representación gráfica de f su asíntota para realizar un proceso de visualización que les permitan reconocer los valores que toman las imágenes de x; en consecuencia, el rango de f. Con relación a los interceptos se espera que los estudiantes determinen que f no tiene intercepto con el eje de abscisas a partir de su representación gráfica y su asíntota. Es decir, que realicen la activación de la génesis discursiva al tomar como referencial la ecuación de la asíntota $y = 1$ y el rango $]1; +\infty[$ para realizar un proceso de prueba permitiéndoles que realicen la justificación.

Así mismo, para hallar el intercepto de f con el eje de ordenadas los estudiantes podrían determinarlo al evaluar f en $x = 0$, en caso no lo hayan realizado para obtener su representación tabular. Es decir, se espera la activación del plano vertical [Ins-Dis] debido a que, por una parte, tomarían como artefacto la representación algebraica de f para realizar un proceso de construcción al evaluarla en $x = 0$ y al mismo tiempo esta representación algebraica sería tomada como referencial para realizar una prueba que permita obtener el intercepto con el eje de ordenadas (cuando $x = 0$).

Análisis del trabajo matemático de Guido

En el análisis del trabajo matemático de Guido, con base al método de Kuzniak y Nechache (2018), se identificaron ocho acciones agrupadas en cinco episodios (ver tabla 2).

Tabla 2. *Episodios y acciones matemáticas*

Episodio	Detalle del episodio	Nro. acciones
1	Representación tabular de f	1
2	Representación gráfica de f	3
3	Justificación de la asíntota de f	1
4	Justificación del rango de f	1
5	Justificación de los interceptos de f	2

Nota: Adaptado de Vivas (2021, p. 51)

Cada episodio es representado en una tabla que contiene dos columnas. La primera columna muestra las acciones matemáticas y la segunda, corresponde a la interpretación de cada una de estas acciones en términos del ETM.

Episodio 1: Representación tabular de f

En este episodio, Guido realiza solamente una acción (ver figura 4).

Acciones matemáticas	Interpretación
Acción 1. Elabora una tabla que contiene algunos valores para f. tabulación x | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 y | 5 | 3 | 2 | $1,5$ | $1,25$	La regla de correspondencia de f es empleada como un ***artefacto*** simbólico y se realiza un proceso de ***construcción*** al obtener tabla de algunos valores para f. Se comprueba la activación de la ***génesis instrumental***.

Figura 4. *Episodio* 1 / Adaptado de Vivas (2021, p. 63)

Episodio 2: Representación gráfica de f

Para este episodio (ver figura 3) se identifican, con base en el ETM, tres acciones.

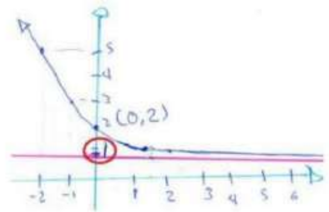
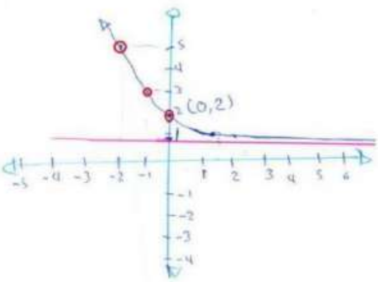
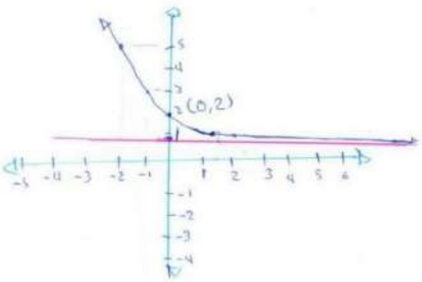
Acciones matemáticas	Interpretación
Acción 2. Representa gráficamente la asíntota de f. 	El parámetro con valor 1 de la regla de correspondencia de f es usada como ***representamen*** y se realiza un proceso de ***visualización*** al representar gráficamente la asíntota de f. Se evidencia la activación de la ***génesis semiótica***.
Acción 3. Representa gráficamente los puntos de paso de f. 	Cada par ordenado de la forma $(x; f(x))$ obtenida de la representación tabular de f es utilizada como ***representamen*** y se realiza un proceso de ***visualización*** al identificarlo como un punto de paso la representación gráfica de f. Se confirma la activación de la ***génesis semiótica***.
Acción 4. Realiza el esbozo de una curva que constituye la representación gráfica de f. 	Las características de f (dominio, comportamiento asintótico y puntos de paso) son empleadas como ***referencial*** y se realiza una ***prueba*** de tipo pragmática que consiste en encontrar una curva que cumpla con estas condiciones y en consecuencia sea la representación gráfica de f. Se evidencia la activación de la ***génesis discursiva***.

Figura 5. *Episodio* 2 / Adaptado de Vivas (2021, p. 63-64)

Episodio 3: Justificación de la asíntota de f

Este episodio contiene solamente una acción del estudiante Guido con su respectiva interpretación (ver figura 6).

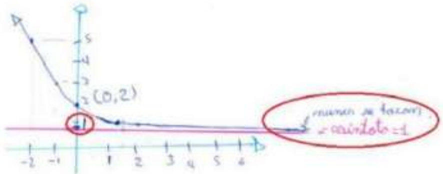
Acciones matemáticas	Interpretación
Acción 5. Justifica que la asíntota de f tiene por ecuación $y = 1$. 	El parámetro con valor 1 de la regla de correspondencia de f es usado como ***referencial*** y se realiza un proceso de ***prueba*** al justificar que la asíntota de f tiene por ecuación $y = 1$. Se evidencia la activación de la ***génesis discursiva***.

Figura 6. *Episodio* 3 / Adaptado de Vivas (2021, p. 64)

Episodio 4: Justificación del rango de *f*

Este episodio, al igual que el anterior, está constituido solamente por una acción que realiza Guido (ver figura 4).

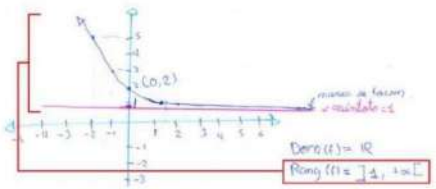
Acciones matemáticas	Interpretación
Acción 6. Determina el rango de f. 	La representación gráfica de f es utilizada como ***representamen*** y realiza un proceso de ***visualización*** al reconocer los valores que toman las imágenes de x y en consecuencia, el rango de f. Se evidencia la activación de la ***génesis semiótica***.

Figura 7. *Episodio* 4 / Adaptado de Vivas (2021, p. 65)

Episodio 5: Justificación de los interceptos de *f*

En este último episodio, Guido realiza dos acciones (ver figura 8).

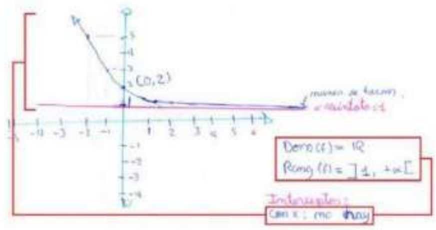
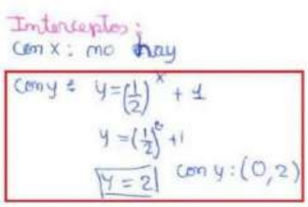
Acciones matemáticas	Interpretación
Acción 7. Determina que f no tiene intercepto con el eje de abscisas. 	La representación gráfica de f o su rango es empleada como ***referencial*** y se realiza un proceso de ***prueba*** al justificar que la representación gráfica de f no intercepta el eje de abscisas. Se evidencia la activación de la ***génesis discursiva***.
Acción 8. Determina el intercepto de f con el eje de ordenadas. 	La regla de correspondencia de f es usada como ***artefacto*** simbólico y realiza un proceso de ***construcción*** al obtener la imagen de $x = 0$. Lo que muestra la activación de la ***génesis instrumental***.

Figura 8. *Episodio* 5 / Adaptado de Vivas (2021, p. 65)

En la identificación de las acciones matemáticas de Guido, el estudiante no determinó explícitamente la monotonía de la función f. Sin embargo, la representación gráfica que realizó es adecuada, porque hizo uso de la regla de correspondencia de f para identificar su comportamiento asintótico y, por otro lado, le permitió elaborar la construcción de algunos puntos de paso, tomando en consideración su dominio, para esbozar una curva que cumpla con ambas condiciones.

Asimismo, se puede afirmar que la producción realizada por Guido, que se expresa en las acciones matemáticas identificadas, describe un trabajo matemático que se posiciona en el paradigma Análisis Aritmético-Geométrico (AG) porque realiza interpretaciones y suposiciones implícitas obtenidas a partir de la regla de correspondencia de f.

DISCUSIÓN

A partir de la interpretación de las acciones matemáticas de Guido, se reconoce la activación de las génesis semiótica, instrumental y discursiva. Cabe destacar que las génesis semiótica y discursiva se activan con mayor frecuencia.

Asimismo, a partir de la activación de las génesis en el episodio 2 se identifica la activación del plano vertical Semiótico-Discursivo. Por su parte, en el episodio 5 se identifica que el plano vertical Instrumental-Discursivo es activado.

El trabajo matemático de Guido se encuentra en el paradigma Análisis Aritmético-Geométrico (AG). Además, la producción presentada por el estudiante coincide con la producción esperada a pesar de que en sus acciones matemáticas no consideró el comportamiento asintótico de la función.

Agradecimientos

Nuestro agradecimiento a la Red Iberoamericana de Investigación en Trabajo Matemático-RIITMA, especialmente a la Red RIITMA-Perú; a la línea de investigación Tecnologías y Visualización en Educación Matemática-TecVEM, de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas y al Instituto de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas-IREM, de la Pontificia Universidad Católica del Perú, por el apoyo brindado para desarrollar la presente investigación.

REFERENCIAS

Brucki, C. (2011). *O uso de Modelagem no ensino de função exponencial* (tesis de maestría) Recuperado de: https://tede2.pucsp.br/handle/handle/10900

Kuzniak, A. (2011). L'espace de travail mathématique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 16*, 9-24. Recuperado de : https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-01060043

Kuzniak, A., y Richard, P. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Relime, 17*(4), 9–10. doi: https://dx.doi.org/10.12802/relime.13.1741a

Kuzniak, A., Montoya, E., y Vivier, L. (mayo de 2015). El espacio de trabajo matemático y sus génesis. En C. Nucamendi (Presidencia). Conferencia llevada a cabo en el XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática, Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México. Recuperado de: http://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/1497/722

Kuzniak, A. y Nechache, A. (diciembre de 2018). Una metodología para analizar el trabajo personal de los estudiantes en la teoría de los espacios de trabajo matemático. En E. Montoya (Presidencia), *Espacio de Trabajo Matemático*. Simposio llevado a cabo en el Sexto Simposio Internacional ETM, Valparaíso, Chile.

Kuzniak, A., Tanguay, D., Vivier, L., Mena, J., Mena, A. y Montoya, E. (Julio de 2016). Conectar los ETM del análisis: el caso de la función exponencial. En K. Nikolantonakis (Presidencia), *Espacio de Trabajo Matemático*. Simposio llevado a cabo en el Quinto Simposio Internacional ETM, Florina, Grecia.

Montoya, E. & Vivier, L. (2016). Mathematical working space and paradigms as an analysis tool for the teaching and learning of analysis. En *ZDM Mathematics Education*, *48*(6), 739-754. Recuperado de: http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/~ecosetma/Images/MWS-ZDM.pdf

Sureda, P. y Otero, M. (2013). Estudio sobre el proceso de conceptualización de la función exponencial. *Educación Matemática, 25*(2), 89-118. Recuperado de: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=405/40528961005

Vivas, J. (2021). *Trabajo matemático de estudiantes de humanidades en tareas sobre sobre función exponencial* (tesis de maestría) Recuperado de: http://hdl.handle.net/20.500.12404/18104