

## **Artículo original**

### **Análisis de la producción matemática de estudiantes de nivel secundario: una mirada desde el espacio de trabajo matemático**

### **Analysis of the mathematical production of high school students: a view from the mathematical workspace**

Marco Antonio Ticse Aucahuasi <sup>1a</sup>      Jesús Victoria Flores Salazar <sup>2b</sup>

<sup>1</sup> Pontificia Universidad Católica del Perú. Lima, Perú

[marco.ticse@pucp.edu.pe](mailto:marco.ticse@pucp.edu.pe)

<sup>a</sup> ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1209-9944>

<sup>2</sup> Pontificia Universidad Católica del Perú. Lima, Perú

[jvflores@pucp.pe](mailto:jvflores@pucp.pe)

<sup>b</sup> ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0036-140X>

#### **Información**

Recibido: 14/03/2021.

Aceptado: 26/05/2021.

#### **Palabras clave:**

Espacio de trabajo matemático, tasa de variación, GeoGebra.

#### **Information**

#### **Keywords:**

Mathematical workspace, rate of variation, GeoGebra.

#### **Resumen**

Investigaciones en Didáctica de la Matemática señalan cuán importante es conocer y entender el quehacer matemático del estudiante –quehacer con o sin utilización de recursos tecnológicos– ya sea desde una postura cognitivista o epistemológica. En ese sentido, en este reporte se utiliza como herramienta teórica el Espacio de Trabajo Matemático (ETM) para analizar la producción matemática de estudiantes chilenos de nivel secundario (16–17 años). Para este propósito se presenta una situación de aprendizaje con tareas relacionadas con la tasa de variación en la que se utiliza GeoGebra. A partir del análisis de las producciones de los estudiantes, se evidencia que esta teoría proporciona herramientas para caracterizar la producción matemática de estudiantes. En particular, este marco teórico permite describir y analizar el proceso de construcción progresivo del significado de la tasa de variación (que lleva a la noción intuitiva de derivada) a partir de la activación de las génesis semiótica, instrumental y discursiva, la coordinación de planos verticales semiótico-instrumental, semiótico-discursivo e instrumental-discursivo, así como los paradigmas del Análisis privilegiados por los estudiantes.

#### **Abstract**

Research in Didactics of Mathematics shows how important it is to know and understand the student's mathematical task -whether with or without the use of technological resources- either from a cognitivist or epistemological point of view. In this sense, this report uses the Mathematical WorkSpace (MWS) as a theoretical tool to analyze the mathematical production of Chilean high school students (16-17 years old). For this purpose, a learning situation is presented with tasks related to the rate of variation in which GeoGebra is used. From the analysis of the students' productions, it is shown that this theory provides tools to characterize the mathematical production of students. In particular, this theoretical framework allows describing and analyzing the process of progressive construction of the meaning of the rate of variation (leading to the intuitive notion of derivative) from the activation of the semiotic, instrumental and discursive genesis, the coordination of semiotic-instrumental, semiotic-discursive and instrumental-discursive vertical planes, as well as the paradigms of Analysis privileged by the students.

## **INTRODUCCIÓN**

Desde la Didáctica de la Matemática, particularmente en el aprendizaje del Cálculo, existe una preocupación por conocer sobre el quehacer matemático del estudiante –quehacer realizado con o sin recurso tecnológicos. En efecto, resulta necesario comprender aquellos procesos a través de los cuales los estudiantes movilizan sus conocimientos y dotan de significado a diferentes conceptos del Cálculo (Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2008; Gil, 2014).

Hace más de dos décadas, se informa que la enseñanza de los principios del Cálculo era una problemática (Artigue, 1995). En consecuencia, se han venido desarrollado una gran cantidad de investigaciones, las cuales han reportado –entre otros objetivos–, la construcción de conceptos del Cálculo, así como, las dificultades y obstáculos epistemológicos que estos hechos involucran; todo ello a partir del análisis a la producción matemática del estudiante.

En ese sentido, las investigaciones producidas se basaron principalmente en aspectos desde distintos marcos teóricos, ya sea bajo posturas cognitivistas o epistemológicas. Por ejemplo, se basaron en la Teoría de Registros de Representaciones Semióticas (Silva, 2012; Viseu, 2017), el Enfoque instrumental (García-Cuéllar, Martínez-Miraval y Salazar, 2018), las Situaciones Didácticas (Calla, 2017), los Modos de Pensamiento (Muñoz, 2015), entre otros.

Cabe señalar que, si bien la afirmación sobre la importancia en el uso de algún referencial teórico como herramienta de análisis resulta ser predecible, esta depende fundamentalmente de las necesidades investigativas, por lo que la pertinencia de procurar y usar un referencial teórico que nos permita dar cuenta sobre el quehacer o el trabajo matemático del estudiante no es una tarea elemental.

Así pues, teniendo en cuenta lo anterior, hace algunos años la teoría de Espacio de Trabajo Matemático ha cobrado interés por la comunidad en la Didáctica de la Matemática (Menares, 2016; Henríquez-Rivas y Montoya-Delgado, 2016; Gaona, 2018; Salazar y Carrillo, 2019; Vivas, 2021; entre otros). Esta teoría se describe como una herramienta teórica que permite analizar y caracterizar el conocimiento y la producción matemática del estudiante cuando se enfrentan a tareas o problemas matemáticos.

De esta manera, para ejemplificar la pertinencia de este marco teórico, en este reporte presentamos un extracto de la tesis de maestría del primer autor (Ticse, 2021), que evidencia los análisis a la producción matemática de estudiantes chilenos de educación secundaria cuando resuelven tareas sobre la tasa de variación ayudados con el GeoGebra.

## MATERIAL Y MÉTODOS

A continuación, presentamos algunos aspectos generales a utilizar del Espacio de Trabajo Matemático.

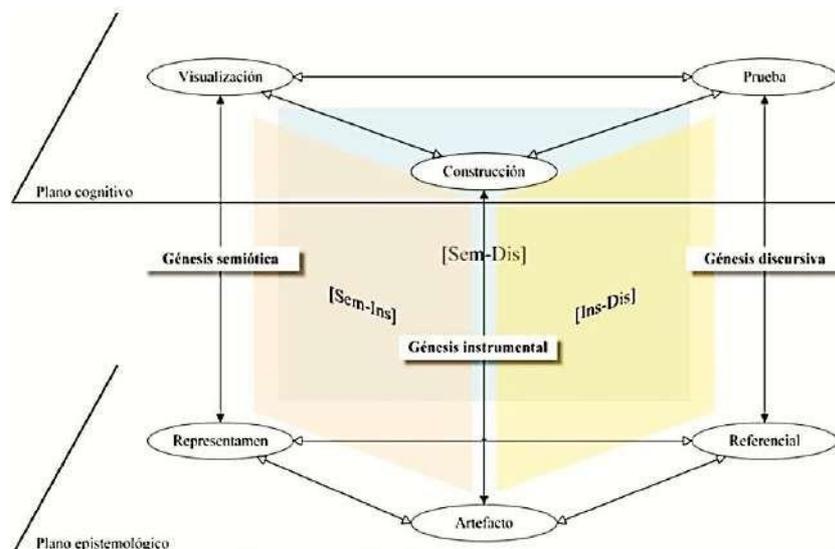
### Espacio de trabajo matemático

La teoría de Espacio de Trabajo Matemáticos (ETM de aquí en adelante), se precisa con el objetivo de comprender y organizar mejor lo que se pone en juego alrededor del trabajo matemático en un marco escolar. Es importante indicar que, las tareas y la producción matemática que se desarrolla para enfrentar tales tareas, posibilita la evolución del ETM.

De esta forma, la organización del ETM permite transitar entre dos niveles o planos. Por un lado, el plano epistemológico (pensando en los objetos, su naturaleza y el modelo matemático en el que se encuentran inmersos) donde se hacen presentes elementos como el representante, los artefactos y el referencial teórico; y, por el otro lado, el plano cognitivo (pensando en el sujeto y la utilización que da a los objetos), compuesto por la visualización, la construcción y la prueba. (Kuzniak, 2011; Kuzniak, Tanguay, y Elia, 2016).

La articulación de dichos planos se da mediante un conjunto de génesis que no son independientes una de otras. La génesis semiótica está basada en los registros de representación semiótica que confiere a los objetos tangibles del ETM un estatus de objeto matemático operacional; la génesis instrumental, permite operacionalizar los artefactos en el proceso de construcción; y, la génesis discursiva que da sentido a las propiedades para dejarlo al servicio del razonamiento matemático.

La coordinación entre dos o más génesis compone los llamados *planos verticales*. Así se considera, el plano semiótico-instrumental ([Sem-Ins]), que privilegia la identificación y exploración de los objetos, desarrollando una competencia ligada al descubrimiento; el plano instrumental-discursivo ([Ins-Dis]), que desarrolla un razonamiento matemático en el que se considera la cuestión de la prueba a partir de experimentos; y por último, el plano semiótico-discursivo ([Sem-Dis]), el cual es orientado hacia la comunicación matemática de los resultados, ya sea, si la atención se centra en el lado semiótico bajo la descripción de signos y un razonamiento perceptivo, o si la atención se centra, en una prueba o demostración, bajo un razonamiento deductivo (ver Figura 1.) (Kuzniak *et al.*, 2016).



**Figura 1.** Diagrama del Espacio de Trabajo Matemático/ Adaptado de Kuzniak y Richard (2014, p. 11)

Adicional a lo anterior, para caracterizar el trabajo matemático que privilegia el estudiante, se hace alusión a los paradigmas de un dominio matemático específico. Particularmente, en el dominio del Análisis se distinguen los siguientes paradigmas: Análisis Geométrico-Aritmético (AG), que permite interpretaciones nacidas de la geometría, del cálculo aritmético o del mundo real; Análisis Calculatorio (AC), donde las reglas de cálculo son definidas, más o menos explícitamente, y se aplican independientemente de la reflexión de la existencia y naturaleza de los objetos introducidos; y el Análisis Real (AR) que es caracterizado por un trabajo de aproximación: supremos e ínfimos, cotas; una entrada a trabajos de proximidad (o una entrada más topológica): “cerca de  $\varepsilon$ ”, “lo despreciable”. (Montoya-Delgadillo y Vivier; 2016).

Asimismo, se describe los tipos de ETM llamados: el ETM de referencia, que se refiere al espacio de trabajo definido de manera ideal en función de criterios matemáticos; el ETM idóneo, que se refiere al espacio definido en términos didácticos; y el ETM personal, que se refiere al trabajo efectivo de quien resuelve una tarea matemática.

Luego de describir algunos aspectos generales del ETM, en el siguiente apartado se muestra el proceso de análisis a la producción matemática de unos estudiantes cuando resuelve una tarea, con el fin de ejemplificar cómo este marco teórico permite dar cuenta sobre el trabajo matemático de dichos estudiantes.

## El análisis del trabajo matemático de estudiantes con base en el ETM

En esta parte nos basamos en la investigación de Ticse (2021), que estudia el trabajo matemático de estudiantes chilenos de cuarto y último año de Educación Secundaria (16-17 años) al resolver tareas relacionadas con la tasa de variación como velocidad (media e instantánea).

Recogiendo lo más importante, se diseñó una situación de aprendizaje y applets del GeoGebra, que fueron proporcionados a tales estudiantes agrupados en dos binomios (B1 y B2), para su resolución y uso, respectivamente.

Así, la situación de aprendizaje que tuvo el propósito de evidenciar las acciones de los estudiantes al resolver dieciocho tareas para determinar la velocidad instantánea de un objeto, se traduce en articular la construcción de la tasa de variación media e instantánea y el estudio de la pendiente de la recta secante y recta tangente a una curva, respectivamente; la tasa de variación es considerada como la variación o cambio de la velocidad en relación al tiempo. Vale la pena mencionar que, conceptos como pendiente, velocidad y tasa de variación media son importantes en sí mismos, ya que constituyen la estructura del Cálculo frente a las habilidades en el manejo de símbolos y expresiones algebraicas (Azcárate, 2000).

En la Figura 2, se muestra el problema *La carrera de sacos* que está inscrito en la situación de aprendizaje presentado a los estudiantes.

**LA CARRERA DE SACOS**

Jorge es un participante en una carrera de sacos. Ayudados de un cronómetro sus amigos tomaron los datos de las distancias en cada segundo recorrido tal y como se muestra en la siguiente tabla.

Tiempo en segundos (t)	0	2	4	5	7	10
Distancia en metros (d)	0	0,8	3,2	5	9,8	20

Siguiendo la estructura del juego de Jorge y los sacos, determinaremos cuánto es exactamente la velocidad en el instante cuando  $t = 7$  segundos.

**Figura 2.** El problema presentado a los estudiantes / De Ticse (2021, p. 49)

A raíz que se pretende mostrar cómo el ETM es utilizado como una herramienta teórica para estudiar el trabajo matemático de los estudiantes, al resolver tareas con la tasa de variación, en este reporte seleccionamos y presentamos la última tarea, que incluyó el uso de herramientas del GeoGebra. A continuación, mostramos los análisis.

## RESULTADOS

Para mostrar los análisis a la producción matemática de los binomios B1 y B2, es importante realizar un análisis didáctico de la situación de aprendizaje. Así pues, describimos el objetivo de la tarea seleccionada y se realiza un análisis de las acciones esperadas (análisis-esperado). Luego, mostramos el análisis de lo ocurrido durante la aplicación de la situación de aprendizaje (análisis-obtenido). Todo ello, bajo las consideraciones del referencial teórico.

De esta manera, la tarea seleccionada, tiene como foco guiar a los estudiantes a establecer diferencias al modo de cómo determinar la velocidad media e instantánea. Sin embargo, para alcanzar el propósito de dicha tarea, es fundamental la ejecución de las tareas anteriores las cuales dependen principalmente de procesos de visualización y construcción, junto a iteradas exploraciones e interpretaciones mediante la manipulación de diferentes artefactos (tabla de valores, fórmula de la variación y velocidad, deslizador, pendiente y vista gráfica del GeoGebra). A partir de ello, los estudiantes consiguieron realizar tratamientos en el registro algebraico y el registro de lenguaje natural, para determinar la velocidad media e instantánea con éxito.

Consecuencia de lo anterior, esperamos que los estudiantes puedan establecer y construir organizadamente que, la velocidad media e instantánea corresponden a la pendiente de la recta secante y tangente de una curva, respectivamente.

Diga con sus palabras la diferencia entre la velocidad media y la velocidad instantánea especificando cómo se determinan ambas velocidades.

**Figura 3.** Tarea seleccionada / De Ticse (2021, p. 91)

Desde las componentes del ETM, decimos que la génesis semiótica es activada mediante el proceso de visualización e interpretación a la gráfica de la curva en el GeoGebra y las pendientes de las rectas (secante y tangente) obtenidas en las tareas anteriores. Así, a partir de la dinámica de la génesis semiótica, se desarrolla un razonamiento perceptivo que permite identificar y construir organizadamente la definición de la velocidad media e instantánea como una pendiente de recta secante y tangente, respectivamente. De esta forma, la génesis discursiva es activada y con ello el plano vertical [Sem-Dis]. Asimismo, al realizar interpretaciones y validaciones justificadas en el significado de las velocidades medias e instantáneas, se estaría privilegiando el paradigma del Análisis Real (AR).

### Trabajo matemático del binomio B1

De acuerdo con la producción matemática de B1, se evidencia el proceso de visualización e interpretación a la pendiente de la recta secante y tangente como la representación de las velocidades pedidas. B1 reconoce la diferencia entre la velocidad media e instantánea a partir de cómo fueron obtenidas. (Figura 4). Con ello, la dinámica en la génesis semiótica permite a B1 estructurar y organizar la definición de tales velocidades, con lo cual es activado el plano vertical [Sem-Dis].

$V_{media}$  : - variación de velocidad entre 2 tiempos distintos.  
 - Se determina calculando la pendiente entre ambos puntos.  
 $V_{instantánea}$  : - velocidad en un punto específico  
 - Se calcula con la pendiente de la recta tangente a la función a la que está inscrita

Figura 4. Producción matemática de B1 / Ticse (2021, p. 93)

Por otro lado, el par utiliza la gráfica de la curvad ( $t$ ) para realizar interpretaciones y validaciones con el fin de justificar el significado de las velocidades medias e instantáneas. Con ello, el paradigma del Análisis Real (AR) es privilegiado por el par.

### Trabajo matemático del binomio B2

A comparación de B1, en la producción matemática de B2, se evidencia el proceso de visualización e interpretación de las velocidades media e instantánea, representadas como la razón entre la variación de distancia y tiempo. Observamos que B2 establece una diferencia entre la velocidad media e instantánea a partir de sus respectivas definiciones como cocientes. Según el par, “la velocidad media es el valor entre la variación de la distancia en un intervalo de tiempo ( $V = vd/vt$ ), en cambio, la velocidad instantánea es un punto específico, con un tiempo específico  $X/T$ ”, tal y como se ve en la Figura 5. Así, la génesis semiótica es activada.

La velocidad media es el valor entre la variación de la distancia en un intervalo de tiempo ( $V = \frac{v.d}{v.t}$ ), en cambio la velocidad instantánea es un punto específico, con un tiempo específico  $\frac{X}{T}$  posición del objeto.

Figura 5. Producción matemática de B2 / Ticse (2021, p. 94)

Vale la pena decir que, si bien B2 no señala su repuesta en base a nuestro análisis de las acciones esperadas (ya que representa a las velocidades pedidas como el cociente entre las magnitudes de distancia-tiempo y no involucra un trabajo con pendientes) la dinámica en la génesis semiótica le permite al par organizar la definición de tales velocidades, con lo cual es también activado el plano vertical [Sem-Dis].

## DISCUSIÓN

Los análisis realizados a las producciones matemáticas de los estudiantes, bajo la lupa del ETM, confirman la pertinencia de este marco al ser una herramienta teórica para caracterizar dicha producción cuando se resuelven tareas. En efecto, el diseño del ETM facilita una organización que considera simultáneamente tanto aspectos epistemológicos de la matemática como aspectos cognitivos del trabajo requerido por los estudiantes al resolver una tarea dada. De esta forma, este marco permitió describir y

analizar el proceso de construcción progresivo del significado de la tasa de variación media e instantánea, siento esta construcción el camino hacia la noción intuitiva de derivada.

Es importante mencionar que, la tesis considerada (Ticse, 2021), afirma que las acciones y producciones matemáticas se ven caracterizados principalmente por la activación de las génesis semiótica, instrumental y discursiva, y con ello los planos verticales [Sem-Ins] y [Ins-Dis], así como los paradigmas privilegiados del Análisis AG y AC. Sin embargo, la tarea mostrada en este reporte, refleja la coordinación de las génesis semiótica y discursiva en la activación del plano vertical [Sem-Dis] a partir del proceso de visualización e interpretación, tanto a la pendiente de la recta secante y tangente, como al cociente entre las magnitudes de distancia-tiempo. Con ello, se realizan argumentaciones y validaciones para establecer y construir organizadamente la definición de velocidad media e instantánea.

Asimismo, si bien el paradigma del Análisis Real (AR) fue privilegiado por un binomio, este no fue constante. Este hecho se explica ya que los estudiantes de Educación Secundaria suelen basar sus justificaciones y validaciones a partir de interpretaciones basados en la Geometría y breves nociones de variación. En este punto es importante destacar el rol de los artefactos (tabla de valores, fórmula de la variación y velocidad, deslizador, pendiente y vista gráfica del GeoGebra).

Al concluir este reporte, reconocemos que la problemática dada en el aprendizaje del Cálculo por conocer el quehacer matemático del estudiante no es reciente; no obstante, subrayamos la posición y relevancia que el ETM ha ganado en la comunidad científica de la Didáctica de la Matemática. Con ello, se muestra la posibilidad de considerar el ETM como una opción para enfrentar esta y otras problemáticas suscitadas en distintos dominios de la matemática.

## Agradecimientos

Agradecemos a la Red Iberoamericana de Investigación en Trabajo Matemático-RIITMA, especialmente a la **Red RIITMA-Perú**; a la línea de investigación Tecnologías y Visualización en Educación Matemática-TecVEM, de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas y al Instituto de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas-IREM, de la Pontificia Universidad Católica del Perú, por el apoyo brindado para desarrollar la presente investigación.

## REFERENCIAS

- Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 97-140). Grupo Editorial Iberoamérica.
- Azcárate, C. (2000). El precálculo, un eslabón necesario entre las funciones y el análisis. *Números* (43 y 44), 259-262.
- Calla, A. (2017). *Una situación didáctica para la enseñanza de la derivada, en el segundo ciclo de la carrera de ingeniería en una Universidad Privada de Lima*. (Tesis de Maestría) Universidad Nacional de Educación Enrique Guzmán y Valle, Perú. <http://repositorio.une.edu.pe/handle/UNE/1770>
- Gaona, J. (2018). *Elaboración de un sistema de evaluación en línea como proceso de formación de profesores de Matemáticas*. (Tesis de doctorado). Université Denis Diderot - Paris 7, Francia. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-02458946>
- García-Cuéllar, D. Martínez-Miraval, M. y Salazar, J. (2018). Génesis Instrumental de la Razón de Cambio Instantánea mediada por GeoGebra. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, México*. 31(2), 1876-1883. <http://funes.uniandes.edu.co/13646/>
- Gil, R. (2014). *A aprendizagem da noção de derivada no 11º ano*. (Tesis de Maestría) Universidade de Lisboa, Portugal. <http://hdl.handle.net/10451/18000>
- Henríquez-Rivas, C., y Montoya-Delgado, E. (2016). El Trabajo Matemático de Profesores en el Tránsito de la Geometría Sintética a la Analítica en el Liceo. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 30(54), 45-66. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a03>

- Kuzniak, A. (2011). L'espace de travail mathématique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 16, 9-24. <https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-01060043/document>
- Kuzniak, A., y Richard, P. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17(4-1), 5-39. <http://dx.doi.org/10.12802/relime.13.1741a>
- Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). Mathematical working spaces in schooling: an introduction. *ZDM*, 48(6), 721-737. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0812-x>
- Menares, R. (2016). *Estudio del espacio matemático del análisis de profesores de Matemática en Chile: El caso de las funciones continuas* (Tesis de doctorado). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile.
- Montoya-Delgadillo, E., & Vivier, L. (2016). Mathematical working space and paradigms as an analysis tool for the teaching and learning of analysis. *ZDM*, 48(6), 739-754. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0777-9>
- Muñoz, M. (2015). *La derivada. Una Aproximación desde los Modos de Pensamiento*. (Tesis de Maestría). Universidad Alberto Hurtado, Chile. <http://repositorio.uahurtado.cl/handle/11242/23853>
- Silva, E. (2012). *Uma proposta para o ensino da noção de taxa de variação instantânea no ensino médio*. (Tesis de Maestría) Pontificia Universidade Católica de São Paulo, Brasil. <https://tede2.pucsp.br/handle/handle/10934>
- Salazar, J., y Carrillo, F. (2019). Espacio de Trabajo Matemático Personal de profesores en relación a la función definida por tramos. *Uni-pluriversidad*, 19(2), 144-160. <https://doi:10.17533/udea.unipluri.19.2.08>
- Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 11(2), 267-296. <http://hdl.handle.net/11441/16348>
- Ticse, M. (2021). *La tasa de variación de una función real de variable real: trabajo matemático de estudiantes de educación secundaria*. (Tesis de Maestría) Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú. <http://hdl.handle.net/20.500.12404/17963>
- Viseu, F. (2017). Representações na aprendizagem da derivada de uma função por alunos do ensino secundário. *Zetetike*, 25(2), 265-288. <http://dx.doi.org/10.20396/zet.v25i2.8649274>
- Vivas, P. (2021). *Trabajo matemático de estudiantes de humanidades en tareas sobre función exponencial*. (Tesis de Maestría) Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú. <http://hdl.handle.net/20.500.12404/18104>