Quintaesencia
Revista de Educación
ISSN 2076-5363 (en línea)

Quintaesencia [(2020), vol. 11, pp. 18-22]
DOI: https://doi.org/10.54943/rq.v11i.145

Artículo original

Espacio de trabajo matemático idóneo de un profesor universitario con respecto a la derivada de una función real

Ideal Mathematical Workspace of a University Professor with respect to the Derivative of a Real Function

Flor Isabel Carrillo Lara [1,a]   Edwin Cristian Julian Trujillo [2,b]

[1] Pontificia Universidad Católica del Perú. Lima, Perú
[a] ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4181-3513
f.carrillo@pucp.edu.pe

[2] Universidad San Ignacio de Loyola. Lima, Perú.
[b] ORCID: https://orcid.org/ 0000-0002-0642-589X
edwin.julian@usil.pe

Información

Recibido: 14/03/2020.
Aceptado: 26/05/2020.

Palabras clave:
trabajo matemático, profesor universitario, derivada.

Resumen

La labor del profesor y su práctica en el aula nos muestra información sobre los espacios de trabajo matemático que el profesor de matemática propicia. En este reporte de investigación, reflexionamos sobre el Espacio de Trabajo Matemático (ETM) idóneo de un profesor universitario. El ETM idóneo se ocupa de estudiar la actividad matemática que el profesor propicia en el aula cuando trabaja una sesión de clase del tema la derivada. Basado en el método de estudio de caso como herramienta valiosa de investigación, la cual registra la conducta del profesor involucrado en el fenómeno estudiado.

Information

Keywords:
mathematical work, university professor, derivative.

Abstract

The teacher's work and practice in the classroom provide us with information about the mathematical workspaces that the mathematics teacher provides. In this research report we reflect on the ideal Mathematical Workspace (MWS) of a university professor. The ideal MWS is concerned with studying the mathematical activity that the teacher promotes in the classroom when working on a class session on the subject of the derivative. Based on the case study method as a valuable research tool, which records the teacher's behavior involved in the studied phenomenon.

INTRODUCCIÓN

En este reporte de investigación reflexionamos sobre el Espacio de Trabajo Matemático (ETM) idóneo de un profesor universitario. En este sentido, analizamos el caso de un profesor universitario, a quien llamamos Carlos, al abordar la derivada de una función real. Dicho profesor, tiene una formación de pregrado y posgrado en Matemática Pura. Además, labora en dos instituciones**:** una estatal y otra particular**,** con estudiantes de ciencias puras y ciencias empresariales**,** respectivamente. Para este trabajo, se observó dos sesiones en la institución particular. En la primera, Carlos recoge los saberes previos de los estudiantes, tales como ecuación de la recta, rectas paralelas o perpendiculares y límites. En la segunda sesión, el profesor formaliza la noción de derivada dando dos definiciones. La primera es una definición formal a partir del límite y la segunda, sobre la pendiente de una recta. Luego, indica que la recta tangente de una función f en un punto a es la recta que mejor se aproxima al gráfico de la función f en un entorno de dicho punto. Finalmente, muestra un teorema con respecto a las reglas de derivación, y finaliza con una tabla de derivadas.

Marco teórico: Aspectos del Espacio de Trabajo Matemático (ETM)

Con respecto al marco teórico de nuestra investigación, creemos conveniente emplear el Espacio de Trabajo Matemático (Kuzniak, Tanguay y Elia 2016, Vivier, Kuzniak y Gómez-Chacón, 2016) pues se desarrolló buscando vincular y preservar muy estrechamente los puntos de vista epistemológico y cognitivo. Además, está íntimamente ligado al desarrollo del aprendizaje en el aula.

La expresión trabajo matemático quiere decir, que el trabajo aparece como un conjunto de actividades humanas organizadas para alcanzar objetivos; la orientación y el propósito de este trabajo se apoya en las matemáticas. Por el contrario, las matemáticas, así consideradas, se transforman por el hecho mismo de ser consideradas como una obra humana específica. La teoría articula dos planos: el plano epistemológico, donde se da la interacción de tres componentes puramente matemáticos (representamen, artefactos y referencial); y el plano cognitivo, el que se centra en el sujeto que, a su vez, se contempla como sujeto cognitivo; se precisan tres componentes cognitivos (visualización, construcción y prueba).

También, indican que en el ETM se articulan los planos epistemológico y cognitivo, a través de las génesis originadas por el trabajo matemático. La génesis semiótica es el proceso asociado a los signos y representamen (o significantes), y que representa la relación dialéctica entre la sintáctica y las perspectivas semánticas sobre los objetos matemáticos, desarrollado y organizado mediante sistemas semióticos de representación. La génesis instrumental permite hacer a los artefactos operativos mediante los procesos de construcción que contribuyen a alcanzar el trabajo matemático, y la génesis discursiva utiliza las propiedades del sistema de referencia teórico para ponerlas al servicio del razonamiento matemático y para una validación no solamente icónica, gráfica o instrumental.

Además, Kuzniak y Richard (2014) identifican tres planos verticales en el ETM (ver figura 1) cada uno de los cuales está definido por la interacción de dos génesis: semiótica e instrumental [Sem-Ins]; instrumental y discursiva [Ins-Dis] y, semiótica y discursiva [Sem-Dis].

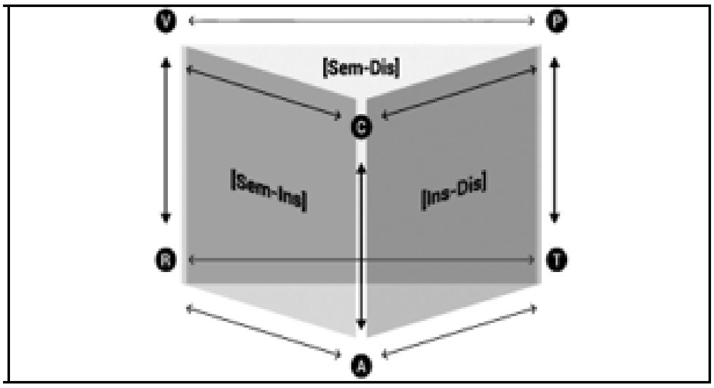

Figura 1. *Modelo del* ETM / Kuzniak, Tanguay y Elia (2016, p.726)

Con relación a los planos: [Sem-Ins], asociado a una génesis semiótica y a la génesis instrumental, existen dos formas de trabajo: una, orientada hacia la construcción de los resultados (figuras, gráficos) y la otra, hacia la interpretación de los datos brindados por los artefactos; [Ins-Dis] asociado a una génesis discursiva de la prueba y a la génesis instrumental y, [Sem-Dis] asociado a las génesis semiótica y discursiva, en el cual se distinguen los razonamientos argumentativos. Por otro lado, el trabajo matemático es caracterizado por sus respectivos paradigmas.

Por ello, Montoya y Vivier (2016) definen los tres paradigmas del dominio del Análisis: Análisis Aritmético-Geométrico (AG), que permite interpretaciones y suposiciones implícitas sobre la base de la Geometría o el mundo real; Análisis Calculatorio (AC), en el cual las reglas del Cálculo son algo explicitas, pero no resulta necesario reflexionar sobre su naturaleza y; Análisis Real o infinitesimal (AR), que involucran aproximación y vecindad, incluso topológico.

MATERIAL Y MÉTODOS

A continuación, presentamos el procedimiento metodológico utilizado en nuestra investigación:

El planteamiento del problema (donde se considera las investigaciones de referencia), pregunta y objetivos de la investigación. Revisión y organización del desarrollo de la derivada en investigaciones del área de la didáctica y en los libros de nivel superior; además de los aspectos del ETM; con ello tener bases teóricas para utilizar instrumentos de recolección de datos y material de curso. Recolección de la la información, realizada a partir de la información proporcionada por el sujeto de investigación, docente universitario del curso Cálculo Diferencial.

En este sentido, se transcriben los datos, consiste en organizar la información obtenida y después recolectar la información que necesitamos de la sesión de clase a través de los instrumentos de investigación diseñados; luego, se organiza la secuencia didáctica sobre el tema función derivada de una función real; asimismo, se interpreta y analiza el trabajo matemático del sujeto de estudio de acuerdo con el marco teórico y metodológico; finalmente, se elaboraron las conclusiones generales e implicaciones de la investigación.

La investigación realizada es cualitativa y consta de una parte experimental que se llevó a cabo con un profesor cuando imparte el tema de la derivada a estudiantes del primer ciclo de **ciencias empresariales** de una universidad privada de Lima-Perú. Para el presente reporte de investigación se analiza la producción del profesor al que llamaremos Carlos, quien desarrolla el tema de la derivada.

Para el análisis del trabajo matemático idóneo de Carlos se utilizaron los paradigmas del Análisis Montoya y Vivier (2016).

Sesión del profesor Carlos y su análisis

Una de las primeras interpretaciones sobre la derivada que presenta el profesor Carlos, es la interpretación geométrica.

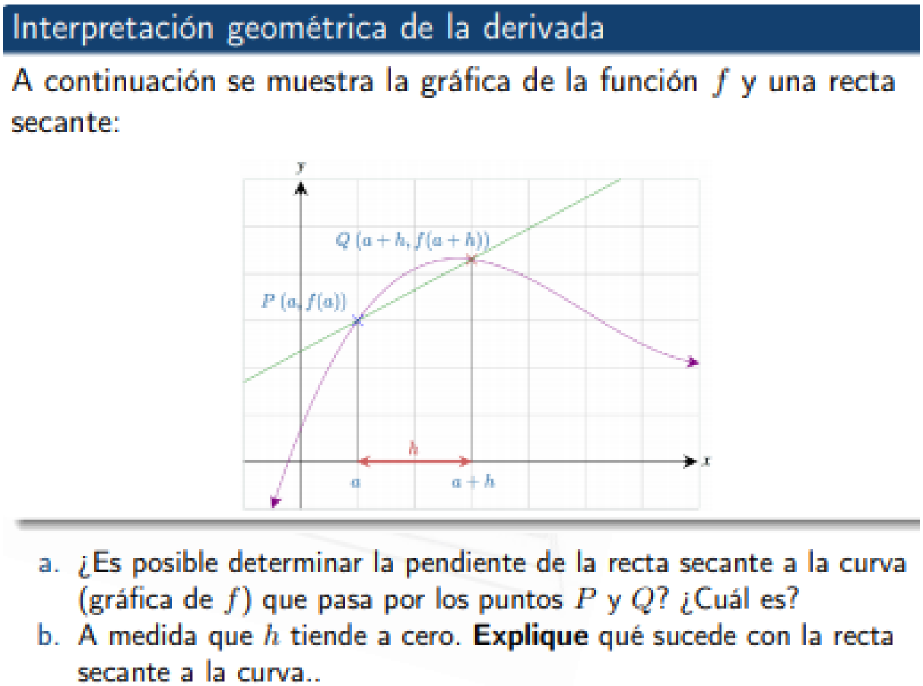

Figura 1. *Interpretación geométrica de la derivada*.

Uno de los problemas más importantes del cálculo diferencial es determinar la recta tangente a la gráfica de una curva. La derivada de una función nos permite resolver este problema. Precisamente, la derivada de la función f evaluada en x_0, es decir, $f'(x_0)$ se interpreta geométricamente como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0; f(x_0))$.

$$m = f'(x_0)$$

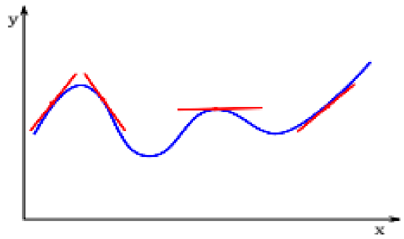

Figura 2. *Recta tangente a la gráfica de una función*.

La ecuación de la recta tangente $\mathcal{L}_t$ a la gráfica de la función f en el punto $(x_0; f(x_0))$ está dada por:

$$\mathcal{L}_t: \ y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

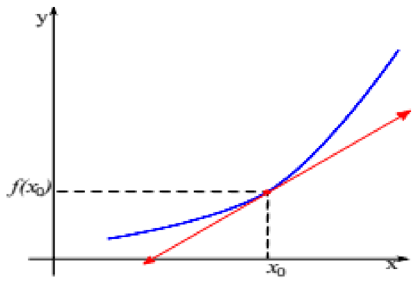

Figura 3. *Recta tangente en un punto de la función*.

Además, en su clase el profesor Carlos considera idóneas las siguientes tareas:

En cada caso, determine la ecuación de la recta indicada:

a) Pasa por el puntos $(5; -1)$ y tiene pendiente igual a 4.

b) Pasa por los puntos $(-2; 3)$ y $(1; -1)$.

Figura 4. *Tarea* 1

Modele la ecuación de la recta tangente y normal a la curva de ecuación $f(x) = x^2 + 2x$ en el punto de abscisa $x = 5$

Figura 5. *Tarea* 2

Si $f(x) = 2\sqrt{x} + 1$, $x \geq 0$, **modele** la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f, en el punto de abscisa $x = 4$

Figura 6. *Tarea* 3

Dada la función f, cuya regla de correspondencia es: $f(x) = -x^2 + 2x$. Si las rectas tangentes a la gráfica de f en $x = a$ y $x = -a$ son perpendiculares. **Calcule** el valor de a

Figura 7. *Tarea* 4.

RESULTADOS

A partir de lo observado, podemos manifestar que el ETM idóneo de Carlos es plantear las operaciones, y realizar cálculos algebraicos para luego dar lugar a las relaciones con otros contenidos; es decir, se manifiesta la génesis semiótica.

Con respecto a las tareas trabajadas por Carlos, corresponden al dominio del Análisis.

En la resolución de las tareas propuestas se activan la génesis semiótica y la génesis instrumental, con ello la activación del plano [Sem-Ins]; con ello, la articulación de los planos epistemológico y cognitivo. Además, identificamos los paradigmas del análisis Aritmético-geométrico (AG) ya que se da la interpretación geométrica de la derivada, y el paradigma del Análisis Calculatorio (AC) ya que se emplean reglas para hallar la ecuación de la recta tangente, así como el uso de las reglas de derivadas.

Por otro lado, se justifica la enseñanza en que el estudiante pueda dar un tratamiento matemático apropiado al contenido. Al estudiante no se les menciona la denominación cociente de diferencias o cociente incremental, el cual puede interpretarse como la velocidad media de variación de una función en cierto intervalo o como la tasa de variación de la función en dicho intervalo; tampoco se plantean problemas de contexto extramatemático, esto a consecuencia del enfoque algorítmico de esta etapa de estudio de la derivada.

DISCUSIÓN

Concluimos que la teoría del ETM es idóneo, porque pone énfasis en el profesor como una persona resolutiva de los problemas asociados y como tutor de lo que supone necesitan los estudiantes para implicarse en las tareas; en estas acciones identificamos la génesis instrumental.

Agradecimientos

Nuestro sincero agradecimiento a la Red Iberoamericana de Investigación en Trabajo Matemático-RIITMA, especialmente a RIITMA-Perú; a la línea de investigación Tecnologías y Visualización en Educación Matemática-TecVEM, de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas y al Instituto de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas-IREM, de la Pontificia Universidad Católica del Perú, por el apoyo brindado para desarrollar esta investigación.

REFERENCIAS

Gómez-Chacón, I.M.; Alain Kuzniak, A.; Inés M. y Vivier, L. (2016). El rol del profesor desde la perspectiva de los Espacios de Trabajo Matemático. Bolema: *Bolema, Rio Claro (SP), 30*(54), *1-22*. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a01

Kuzniak, A. (2011). L'espace de travail mathématique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 16*, 9-24. Recuperado de : https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-01060043.

Kuzniak, A.; Richard, P. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, México, 17,4-1, 5-15.

Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: An introduction. *ZDM, 48*. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0812-x

Montoya, E. & Vivier, L. (2016). Mathematical working space and paradigms as an analysis tool for the teaching and learning of analysis. En *ZDM Mathematics Education, 48*(6), 739-754. Recuperado de: http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/~ecosetma/Images/MWS-ZDM.pdf

Yin, R.K. (1989). *Case study research: design and methods*. Sage.