

## Artículo original

# Dificultades presentes en la enseñanza y aprendizaje del teorema fundamental del cálculo: un estado del arte

## Difficulties in the teaching and learning of the fundamental theorem of calculus: a state of the art

**Brian Valenzuela Pagaza**<sup>1</sup>

**Katia Vigo Ingar**<sup>2, b</sup>

<sup>1</sup> Pontificia Universidad Católica del Perú-IREM, Perú

<sup>2</sup> Pontificia Universidad Católica del Perú-IREM, Perú

<sup>b</sup> ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6814-2492>

[kvigo@pucp.pe](mailto:kvigo@pucp.pe)

### Información

Recibido: 10/08/2019.

Aceptado: 14/09/2019.

#### Palabras clave:

Teorema Fundamental del Cálculo, estado del arte, dificultades en la enseñanza y aprendizaje.

### Information

#### Keywords:

Fundamental Theorem of Calculus, state of the art, difficulties in teaching and learning.

### Resumen

El Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) es una importante herramienta de cálculo en cursos de formación del ingeniero, dicha relevancia también se da por la relación que establece entre el cálculo diferencial e integral la cual motivó la presente investigación, que tiene por objetivo realizar un Estado del arte de las investigaciones empleadas en nuestra tesis de Maestría cuyo foco es el estudio TFC. Este trabajo tiene como finalidad conocer las dificultades que se presentan al abordar la enseñanza y aprendizaje del TFC. El estudio realizado evidenció que las nociones de función, continuidad y variación son dificultades que se presentan en el aprendizaje del TFC, por tal motivo son conocimientos previos importantes que debe tener en cuenta el docente al llevar a cabo este tema.

### Abstract

The Fundamental Theorem of Calculus (FTC) is an important calculus tool in engineering education courses, such relevance is also given by the relationship it establishes between differential and integral calculus which motivated the present research, which aims to make a State of the art of the research used in our Master's thesis whose focus is the FTC study. The purpose of this work is to learn about the difficulties encountered when approaching the teaching and learning of FTC. The study evidenced that the notions of function, continuity and variation are difficulties that arise in the learning of FTC, for this reason they are important prior knowledge that the teacher must take into account when carrying out this subject.

## INTRODUCCIÓN

La enseñanza y aprendizaje del cálculo diferencial e integral es un asunto discutido en distintas investigaciones realizadas en el área de la Educación Matemática, siendo esta una de las problemáticas más abordadas por los investigadores. Con la finalidad de aportar a la comunidad investigadora realizaremos un estudio bibliográfico de los trabajos que tienen como foco de estudio la enseñanza y aprendizaje del Teorema Fundamental del Cálculo (TFC), las cuales serán clasificadas y analizadas según el criterio, dificultades presentes en la enseñanza y aprendizaje del TFC, como lo indica la metodología empleada, Estado del arte.

El estudio realizado nos permitirá tener un panorama de las dificultades que se presentan al abordar este objeto de estudio, así como estudiar algunas propuestas de solución planteadas por diversos investigadores a la problemática mencionada anteriormente lo cual es el objetivo de nuestra investigación. Las investigaciones consideradas fueron los antecedentes de nuestra Tesis de Maestría en Enseñanza de las Matemáticas realizada la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP).

Las dificultades que se presentan en la enseñanza y aprendizaje del TFC es el criterio que emplearemos para sistematizar y organizar las tesis y artículos considerados. Afirmamos, que las nociones función, continuidad y razón de cambio son dificultades que se presentan al abordar el TFC los cuales son conceptos importantes del cálculo.

## MATERIAL Y MÉTODOS

Para realizar un estado del arte consideramos dos procedimientos generales, en primer lugar debemos hacer una búsqueda, selección, clasificación y disposición de fuentes de información y en segundo lugar, debemos realizar una integración de la información obtenida, esto es, hacer un análisis de la misma la cual nos permite tener un panorama global e integrador del área del conocimiento en cuestión. En este sentido para Fiorentini y Lorenzato (2006) una investigación que sigue la metodología Estado del arte se caracteriza porque “procura inventariar, sistematiza y evaluar la producción científica en una determinada área (o tema) del conocimiento buscando identificar tendencias y describir el estado de conocimiento de una determinada área de estudio” (p.103).

La finalidad de realizar un estado del arte de un determinado objeto de estudio es descubrir la concepción e interpretación que tienen los investigadores sobre el objeto en cuestión, esto es, hacer explícita la postura teórica y metodológica que presentan sus investigaciones.

Realizar un estado de arte es equiparable con la revisión de antecedentes, pues nos permitirá tener un panorama actual del objeto de estudio en cuestión. Por ejemplo, en nuestra tesis de maestría realizamos un estado del arte de las investigaciones que empleaban tecnologías al abordar la enseñanza y aprendizaje del TFC.

Según Gómez, Galeano y Muñoz (2015) con respecto a los objetivos de realizar una investigación bibliográfica siguiendo esta metodología se pueden establecer cuatro niveles los cuales son denominados por los autores de la siguiente manera: nivel 1, este consiste en explorar y obtener conocimiento del objeto de estudio en cuestión para poder vislumbrar a donde se quiere llegar con la investigación; nivel 2, construir un saber, esto es, delimitar el estado actual en el que se encuentra el desarrollo teórico lo cual puede ser empleado más adelante como referencial teórico para futuras investigaciones; nivel 3, comprender un fenómeno, con respecto a este nivel los investigadores plantean que elaborar un estado del arte consiste en elaborar un documento, instrumento o metodología que permita ser una guía para perfeccionar una determinada temática; nivel 4, este nivel consiste en crear un marco conceptual o un balance documental, esto es, elaborar marcos conceptuales que amplíen la comprensión del objeto de estudio mostrándolo desde diferente enfoques del conocimiento. A continuación, en la Figura 1 mostramos los niveles mencionados.

Figura 1. Finalidades del estado del arte.



Fuente: Gómez et al (2015, 433)

En relación a los procedimientos metodológicos, la información recolectada en las tesis y artículos fue organizada y sistematizada. Los datos considerados fueron recolectados principalmente de revistas de divulgación científica, como Scielo, Latindex y las tesis fueron investigadas en direcciones electrónicas de Universidades y en bibliotecas, con el auxilio del portal electrónico de la CAPES (Coordinación de Perfeccionamiento de Personal de Nivel Superior de Brasil) y el banco de tesis de la PUCP.

### **Análisis de las investigaciones**

Las dificultades que se presentan al abordar la enseñanza y aprendizaje del TFC, es el criterio que emplearemos para analizar las investigaciones seleccionadas, entre ellas encontramos la noción de función, la continuidad, la variación.

Según Godino, Batanero y Font (2003) distinguir las dificultades y los errores de los estudiantes durante el proceso de aprendizaje, determinar las causas que los provocan y estructurar la enseñanza considerando esta información, es el común denominador de las teorías sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Entiéndase por error, la acción o práctica realizada por un estudiante que no es válida en referencia a un determinado conocimiento matemático; el término dificultad muestra el mayor o menor grado de acierto de los estudiantes ante una determinada tarea, se dirá que el índice de dificultad es elevado cuando el porcentaje de aciertos es bajo, mientras que, si el porcentaje es alto, la dificultad es baja.

Con respecto a las dificultades que se presentan en el proceso de enseñanza y aprendizaje los investigadores Godino et al (2003) destacan las siguientes:

- Dificultades relacionadas con los contenidos matemáticos, estas son una posible consecuencia cuando se pretende abstraer y generalizar las matemáticas. Por ello se recomienda realizar un análisis del contenido
- Dificultad matemática a enseñar con la finalidad de saber el grado de dificultad que presenta dicho contenido, además identificar las variables a tener en cuenta para su enseñanza.
- Dificultades causadas por la secuencia de actividades propuestas, estas se manifiestan cuando la propuesta didáctica que presenta el docente no es significativa lo cual se origina cuando: los contenidos que se quiere enseñar no están bien estructurados; los materiales como libros y actividades, ejercicios y problemas, no están claros o mal diseñados; el enfoque del tema realizado por el profesor no es claro ni está bien organizado por ejemplo, no se le entiende cuando habla o el empleo de la pizarra es el adecuado, caótico, no pone suficiente énfasis en los conceptos clave del tema, etc.
- Dificultades que se originan en la organización del centro, estas se manifiestan cuando el horario del curso es inapropiado, la cantidad de alumnos no es la apropiada, no se dispone de materiales o recursos didácticos, etc.
- Dificultades relacionadas con la motivación del alumnado, este tipo de dificultades está relacionado con la autoestima y la historia escolar del alumno.
- Dificultades relacionadas con la falta de dominio de los contenidos anteriores, esto se da cuando el estudiante no tiene los conocimientos previos necesarios para aprender el nuevo conocimiento.

A continuación, analizaremos los trabajos considerados haciendo uso del criterio mencionado. La investigación de Grande (2013) es una tesis doctoral en la cual el investigador realiza una experimentación en clase con la finalidad de que emerja la relación entre las operaciones de integración y de derivación; además, bajo qué condiciones se establece esa relación. Las actividades diseñadas por el investigador están basadas en la noción de acumulación de una función y son desarrolladas con el apoyo del software GeoGebra.

Para ello realizó un cuestionario piloto con 14 alumnos, de la facultad pública de Tecnología en el Estado de Sao Paulo, en el que se analiza los conocimientos que tienen los estudiantes al abordar tópicos como, acumulación, funciones, razón de cambio, relaciones entre la función y su primitiva, los cuales influyen

en el aprendizaje del TFC. Posteriormente, se realiza una actividad con otros estudiantes, de la misma institución, desarrollada con el GeoGebra.

Con respecto a los resultados obtenidos, el cuestionario piloto evidenció en un principio que los estudiantes tuvieron dificultades al interpretar la función representada por

$F(x) = \int_a^x f(t)dt$ , pues, no realizaron la interpretación de la integral, la acumulación. La interpretación que tenían los estudiantes de la integral definida, una herramienta para calcular áreas; también, se evidenció que la derivada no era interpretada como una razón de cambio, sino como la pendiente a una curva; por último, se observó que la noción de función y continuidad no estaban muy desarrollados.

En el segundo cuestionario se realizaron dos tareas en el aula, las cuales permitieron relacionar conceptos tratados anteriormente por los estudiantes con el TFC, como la noción de función, continuidad, variación y acumulación, la continuidad de una función resultó ser una condición necesaria para aplicar el TFC, esto se evidenció en la primera tarea al calcular el volumen del sólido planteado. Además, la idea de acumulación estuvo presente en las dos tareas, al igual que la noción de variación entre dos cantidades.

Para el investigador, abordar el TFC usando la noción de acumulación produjo una mejora significativa en la comprensión del concepto de integral, además, de permitir que logren articular los procesos de derivación e integración. Motivo por el cual Grande (2013) afirma que el uso del GeoGebra facilita el aprendizaje e interpretación de las nociones de acumulación y variación de una función, pues estos son conceptos dinámicos, siendo una herramienta que permite interpretar y observar patrones de ciertas cantidades, como la sección del sólido, la acumulación al calcular las integrales, entre otras, las cuales les permiten desarrollar las nociones mencionadas.

Por otro lado, la investigación desarrollada por Picone (2007) muestra los registros de representación semiótica que son empleados por los profesores de diversas instituciones, públicas y privadas en Sao Paulo, de Brasil. Los docentes de Cálculo que participan en la investigación cuentan con una amplia experiencia de más de 10 años a excepción de uno que sólo cuenta con dos años de experiencia, entre los grados académicos tenemos que un profesor es PhD, cinco profesores tienen el grado de Doctor y sólo dos presentan el grado de Magister, los grados mencionados son en Matemáticas, Educación Matemática, Física y Educación.

La metodología empleada por la investigadora es cualitativa, está consiste en realizar cuestionarios y entrevistas, las cuales permitieron responder a las preguntas planteadas, los cuestionarios se desarrollan en tres etapas: en la primera, se realizan ocho preguntas que tienen la finalidad de identificar el perfil profesional de los profesores, la experiencia que tienen en el cálculo, además de conocer cómo abordan el TFC en su práctica en el aula, si lo hacen de manera gráfica, en forma algebraica o si plantean ambos, además, del uso de algún libro guía para desarrollar sus clases o si recomiendan libros de consulta para los estudiantes.

En la segunda, se realizaron nueve preguntas con la finalidad de conocer el significado que tienen los profesores sobre el TFC, saber la opinión y las respuestas que tienen ante algunas situaciones planteadas en investigaciones realizadas en Educación Matemática, en las cuales se emplea la noción de acumulación y variación. Podemos notar que en las dos primeras etapas se busca verificar si los profesores en realidad transitan entre dos o más registros de representación, o sólo realizan tratamientos en sólo registro.

En la tercera etapa, se desarrollan las entrevistas, las cuales mostraron que los profesores están de acuerdo en que el transitar en diversos registros, como el gráfico, algebraico y verbal, es importante para abordar el TFC además señalan que las nociones de acumulación y variación son buenas alternativas para mejorar la comprensión del TFC, pero no todos los ponen en práctica, lo cual se evidencia cuando el investigador afirma que sólo tres profesores movilizan los registros mencionados en su práctica. Otro resultado, son las sugerencias que brindan para mejorar el desarrollo del TFC, entre las que se destaca realizar la interpretación geométrica del mismo, usar funciones que sean discontinuas para generar conflicto en los estudiantes, además, plantear evaluaciones o ejemplos en las cuales las funciones no

posean antiderivadas con la finalidad de lograr que los estudiantes evidencien la conexión que establece el TFC entre los procesos de integración y derivación.

La investigación realizada por Anacleto (2007) consiste en analizar los conocimientos que retienen los estudiantes que han asistido a las asignaturas de cálculo diferencial e integral (CDI) en Matemáticas sobre el TFC teniendo en cuenta su importancia y relación con los conceptos de derivación e integración. En un principio el estudio muestra que los conocimientos que retienen los estudiantes de Ciencias de la Computación en una Universidad Particular de Sao Paulo, sobre el TFC está incompleto dado que no articulan las nociones de derivadas, integrales y continuidad. Esto es consecuencia de que sólo memorizaron los procedimientos y algoritmos de aplicación, mas no hubo una reflexión de los aspectos conceptuales del TFC lo que evidenció en la prueba a la que fueron sometidos, la cual es denominada por el investigador prueba piloto. Por tal motivo, el investigador cambio a los sujetos de estudio por estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas, de la misma Universidad, pues debido a su formación recibieron mayor cantidad de horas de clase en relación con el TFC.

El estudio realizado por la investigadora tiene como objetivo investigar el conocimiento que moviliza a los estudiantes que asistieron a la disciplina previamente CDI, así como evidenciar la interrelación entre la derivación y la integración, y en qué nivel se da esta. Para ello el investigador analiza si el conocimiento de los estudiantes es mayor en relación a los evaluados inicialmente para lo cual considera los siguientes puntos:

Primero, la derivada de la integral es el integrando; segundo, la integral indefinida de la derivada de una función es la función original; tercero, la integral definida de una función resulta ser la diferencia entre el valor de una función primitiva evaluada en el límite superior y el límite inferior de la integración; por último, los procesos de diferenciación e integración son inversos entre sí. Además, de observar cómo los estudiantes manipulan los conceptos relacionados con el TFC, como la continuidad y la integrabilidad.

El cuestionario estaba compuesto por ocho preguntas y se realizó con trece parejas de estudiantes en las horas de clase regulares en dos períodos de 45 minutos, con un intervalo de aproximadamente 10 minutos; esto muestra que los estudiantes pueden calcular la integral definida de funciones polinómicas sin problemas y que esta es interpretada como el área. En la segunda pregunta se evidencia que tienen algunos problemas para calcular la integral definida cuando la función es discontinua en un punto, es decir, no manejan bien las condiciones para aplicar la integral; en las preguntas 3 y 4 se evidencia que los estudiantes obtienen la integral definida, en la cual el límite superior es variable, de manera geométrica, se espera que realicen cálculos como en la primera pregunta. En la pregunta 5 tienen problemas al calcular la integral definida de una función con dominio partido; luego en la pregunta 6 los estudiantes tienen problemas con identificar el gráfico de la antiderivada a partir del gráfico de la función; en la pregunta 7 es el típico problema de derivar a la integral aplicando el TFC, en esta parte se evidencia que hay estudiantes que realizan la integral y luego derivan el resultado, esto muestra que algunos no aplican el TFC; por último en la pregunta 8 se pide a los estudiantes que planteen la importancia del TFC y que muestren un ejemplo donde se puede aplicar el mismo, es una pregunta abierta en la cual los estudiantes responden que la importancia radica en la relación que se establece con la derivada y la integral.

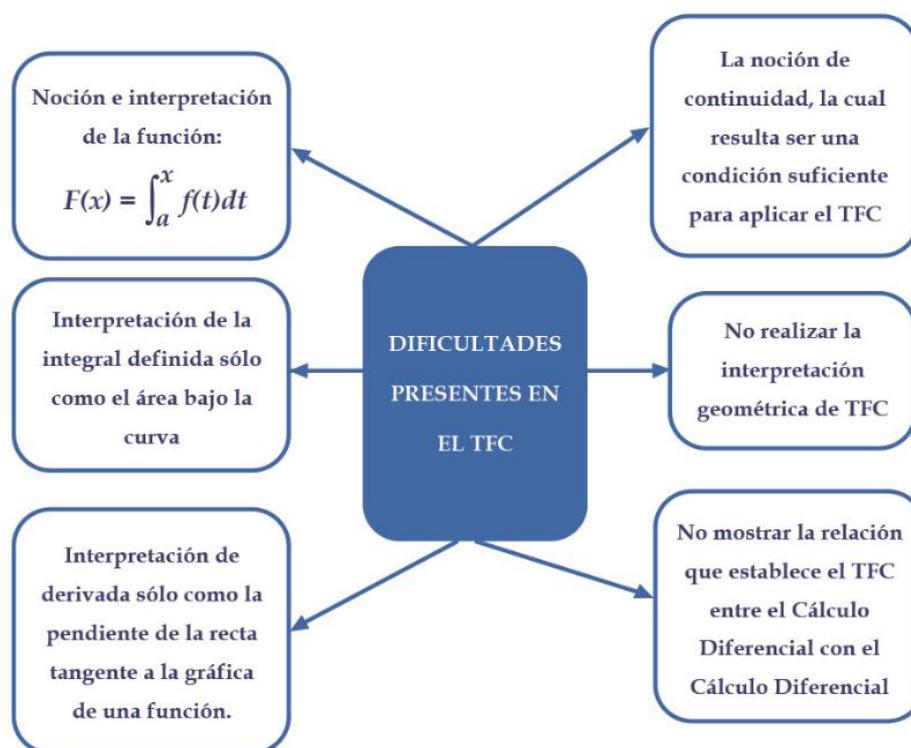
Hasta aquí hemos presentado seis investigaciones donde se evidencia la evolución del TFC a lo largo de la historia y el proceso de formación que ha tenido hasta hoy, considerado como un objeto matemático de estudio. El trabajo histórico-epistemológico de Grande (2013) muestra las dificultades que han tenido los matemáticos al estudiar y lograr formalizar el TFC, lo cual nos hace suponer que esta misma dificultad se encuentra en los estudiantes, motivo por el cual Picone (2007) y Anacleto (2007) afirman que estas dificultades presentes en el TFC hacen que los estudiantes fracasen y reprobren los cursos donde se desarrolla en el TFC.

Las investigaciones muestran que las dificultades que presentan los estudiantes al abordar el TFC son diversas, primero Grande (2013) y Picone (2007) afirman que no tener conceptos sólidos de función, evita que los estudiantes interpreten la siguiente expresión  $F(x) = \int_0^x f(t)dt$  y peor aún que estos realicen ciertas operaciones relacionadas con tal expresión, por ello en las operaciones se manifiestan

muchos cálculos repetitivos lo cual se debe a la algebrización. Segundo, Picone (2007) afirma que cuando los profesores no muestran la relación que hay entre las derivadas y las integrales mediante el TFC los estudiantes no logran entender ciertas conclusiones que brinda la tesis del teorema, lo cual se manifiesta al calcular la derivada de la función  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ , los estudiantes realizan la integral para luego derivar, por ello el investigador recomienda usar funciones que carezcan de primitiva. Tercero no abordar el TFC de manera geométrica ocasiona en los estudiantes la creencia de que la integral sólo sirve para calcular áreas, lo cual ocasiona que se pierda una oportunidad de generar en los estudiantes nuevos conocimientos referentes a la integral y las derivadas.

Para Grande (2013), plantear actividades usando el concepto de acumulación genera que los estudiantes relacionen la derivada con la integral en situaciones contextualizadas, además de mostrar que la continuidad no es una condición necesaria para aplicar el TFC. Este investigador recomienda que para superar estas dificultades se deben emplear herramientas tecnológicas como el GeoGebra. A modo de resumen presentamos las dificultades que se presentan en la enseñanza y aprendizaje del TFC en la Figura 2.

Figura 2. Dificultades presentes en la enseñanza y aprendizaje del TFC



Fuente: Realizado por el investigador.

## RESULTADOS

Las dificultades que se presentan al abordar la enseñanza y aprendizaje del TFC están relacionadas con los contenidos matemáticos lo cual se da al querer generalizar el teorema a todo tipo de funciones, evidencia de ello es cuando intentan utilizar el teorema con funciones discontinuas.

Las dificultades que también se muestran son las causadas por la secuencia de actividades propuestas lo cual se evidencia en la investigación de Picone (2007) en la cual los profesores de cálculo recomiendan realizar actividades que promuevan la formación de conjeturas y el empleo del registro gráfico.

Las dificultades relacionadas con la falta de dominio de los contenidos anteriores, esto se da cuando el estudiante no tiene los conocimientos previos necesarios para aprender el nuevo conocimiento, lo cual se evidencia con los conceptos de función y razón de cambio.

La noción de acumulación permitió contextualizar las actividades, también permitió a los estudiantes articular los procesos de derivación e integración, además de emplear sus conocimientos de función y razón de cambio. Esto se pudo observar en la investigación de Grande (2013).

En las investigación de Grande (2013) el concepto de acumulación resulto un elemento clave para la comprensión y manipulación de la función  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ . Además, este concepto resulto de mucha ayuda para que los estudiantes se desprendan de la interpretación geométrica de la integral definida como área bajo la curva.

El uso del GeoGebra facilitó la exploración de las actividades planteadas por los investigadores además de promover la conjetura, la identificación de patrones y la coordinación de representaciones algebraica, gráfica y tabular.

## REFERENCIAS

- Anacleto, G. (2007). Uma investigação sobre a aprendizagem do teorema fundamental do cálculo. (Dissertação de mestrado en Educación Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Brasil.
- Fiorentini, D.y Lorenzato, S. (2006). *Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos*. Campinas: Autores Associados.
- Grande, A. (2013). Um estudo epistemológico do Teorema Fundamental do Cálculo voltado ao seu ensino. (Tesis doctoral en Educación Matemática), Pontificia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, Brasil.
- Godino, J. (2003). Matemáticas y su didáctica para maestros. En J. Godino, C. Batanero y V. Font. *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. Capítulo 2, pp. 53-82. Granada.
- Gomez, M., Galeano, C. y Jaramillo, D. El estado del arte: una metodología de investigación. *Revista Colombiana de Ciencias Sociales*, 6(2), 423-442. (julio-diciembre,2015)
- Picone, D. (2007) Os registros de representação semiótica mobilizados por professores no ensino do teorema fundamental do cálculo. (Dissertação de mestrado en Educación Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Brasil.