Quintaesencia
Revista de Educación
ISSN 2076-5363 (en línea)

Quintaesencia [(2019), vol. 10, pp. 27-32]
DOI: https://doi.org/10.54943/rq.v10i.119

Artículo original

La didáctica de la matemática y el álgebra lineal

The didactics of mathematics and linear algebra

María Angelita Aredo Alvarado [1, a] **Francisco Javier Ugarte Guerra** [2, b]

[1] Universidad Nacional de Piura, Perú
[a] ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1400-2093 maria_aredo@hotmail.com

[2] Pontificia Universidad Católica del Perú-IREM, Perú
[b] ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5071-8924 fugarte@pucp.edu.pe

Información

Recibido: 12/07/2019.
Aceptado: 08/09/2019.

Palabras clave:

Álgebra lineal, didáctica, enseñanza, aprendizaje.

Resumen

Presentaremos una síntesis del estado del arte de las investigaciones realizadas, desde la Didáctica de la Matemática, sobre la enseñanza y el aprendizaje del álgebra lineal. Observamos que un grupo de ellas se resalta la importancia de las conversiones entre diferentes registros de representación, mientras que otros grupos de investigaciones resaltan los niveles de descripción, los puntos de vista y los modos de razonamiento. En segundo lugar, presentaremos investigaciones basadas en análisis históricos y epistemológicos. Todo ello prueba la riqueza del álgebra lineal como un campo de investigación en Didáctica de la Matemática.

Information

Keywords:

Linear algebra, didactics, teaching, learning.

Abstract

We will present a synthesis of the state of the art of the investigations carried out, from the Didactics of Mathematics, on the teaching and learning of linear algebra. We observe that a group of them emphasize the importance of conversions between different registers of representation, while other research groups highlight the levels of description, points of view and modes of reasoning. Second, we will present research based on historical and epistemological analysis. All this proves the richness of linear algebra as a field of research in Didactics of Mathematics.

INTRODUCCIÓN

Estado del arte de la investigación en didáctica de las matemáticas del álgebra lineal

Dorier (1998) presenta una síntesis de varios trabajos realizados sobre la enseñanza y aprendizaje del Álgebra Lineal y afirma que la investigación de Harel (1985) constituye uno de los componentes esenciales para comprender la vasta reforma de la enseñanza del Álgebra Lineal, en la década de los ochenta en los Estados Unidos. El Grupo de Estudio del Currículo Linear Algebra (LACSG), comité de profesores de todo Estados Unidos, reflexionan sobre una reforma de la educación universitaria en Álgebra Lineal (Carlson y al., 1993). Este grupo elaboró un documento, en forma de recomendaciones, que se organizan en torno a cuatro ejes: La demostración, un tiempo suficiente para la enseñanza del Álgebra Lineal, nuevas tecnologías educativas y los contenidos que deberían incluirse.

Harel (1985) utiliza tres principios de concretización, necesidad y generalización para explicar las dificultades que enfrentan los estudiantes para tratar con ejercicios elementales de Álgebra Lineal en los que los vectores son funciones, por el hecho de que el concepto de función como vector no es concreto para ellos. En otras palabras, los estudiantes no construyen el concepto de función, como un objeto matemático, como una entidad en un espacio vectorial.

Un requisito previo para la realización del principio de concretización es que los estudiantes construyan la comprensión de un concepto en un contexto concreto para ellos. Este requisito es la base de un programa de Álgebra Lineal que Harel (1985) desarrolló para estudiantes de secundaria.

Por el principio de necesidad, “para que los estudiantes aprendan lo que pretendemos enseñarles, deben tener una necesidad de ello, donde “necesidad” se refiere a la necesidad intelectual, no la necesidad social o económica” (Harel, 2000, pag 185).

Como ha observado Harel, en experimentos, los estudiantes no solo no ven la necesidad del concepto de espacio vectorial; sino, por ejemplo, que tampoco comprenden la afirmación de los axiomas del espacio vectorial.

Mientras que los dos primeros principios se refieren al aprendizaje, el principio de generalización está más ligado a la enseñanza del Álgebra Lineal.

En consecuencia, el trabajo de Harel se basa explícitamente en una progresión gradual en la generalización. La posible confusión entre el objeto vector y su representación analítica, prácticamente, no se aborda. Sin embargo, varios estudios han demostrado que la necesidad de separar los objetos de sus diferentes representaciones es uno de los problemas esenciales del aprendizaje del Álgebra Lineal, particularmente en América del Norte (trabajo de Hillel y Sierpinska). En esa misma línea, Dorier (1998), comenta que el concepto de espacio vectorial es central en el Álgebra Lineal; Por lo tanto, un curso de Álgebra Lineal, en el primer año de la universidad, no puede abordar directamente la presentación axiomática de la estructura del espacio vectorial. El vector elemento de un espacio vectorial puede representar varios objetos matemáticos de muy diferentes naturalezas. Un curso de Álgebra Lineal debe hacer frente a la generalidad del tipo de representación. En Francia y en países como Marruecos, por ejemplo, la tradición es que uno introduce desde el primer año de universidad la teoría más general (axiomática) con ejemplos geométricos; mientras que, en América del Norte o Brasil, el marco de las tuplas y el cálculo de la matriz, siguen siendo predominantes en la educación temprana. Sin embargo, cualquiera que sea la elección de los programas, todos los estudios, llevados a cabo en estos países, muestran que en el centro de las dificultades se encuentran los problemas para manejar la generalidad de los objetos introducidos y la naturaleza formal y abstracta de los nuevos conceptos, vinculándolos con los conocimientos ya adquiridos en la educación secundaria. Así, Dorier concluye que el formalismo asociado a esta teoría parece ser una fuente de dificultades. Los estudiantes tienen dificultad para poner significado de ciertos conceptos, por falta de una conexión más visible con sus conocimientos previos.

Dorier concluye que, bajo diversos marcos analíticos, aparecen la riqueza de las interacciones y los posibles juegos entre los diferentes modos de razonamiento o representación, tanto en el funcionamiento del conocimiento como en el proceso de aprendizaje y las dificultades que genera.

Asimismo, Dorier comenta el trabajo de investigación de Raymond Duval (1993 y 1995) que se basa sobre registros de representación semiótica y el funcionamiento cognitivo. Según Duval "representaciones semióticas son producciones realizadas por el uso de señales que pertenecen a un sistema de representación que tiene sus propias limitaciones y la importancia operativa" (Duval, 1993, p.39). La tesis apoyada por el autor es que "las representaciones semióticas no son solo medios de exteriorizar las representaciones mentales con fines de comunicación, sino que son también esenciales para la actividad cognitiva del pensamiento". Se distingue la semiosis como la aprehensión o la producción de representación semiótica. Noesis, aprehensión conceptual de un objeto.

En su tesis, Pavlopoulou (1994), presentó un análisis de cuatro investigaciones realizadas durante dos años, en una sección de primer año de Diploma de Estudios Universitarios Generales (DEUG) en Estrasburgo. Este análisis demuestra muy claramente que el nivel de competencia de los estudiantes en las actividades de conversión es generalmente muy bajo y que la presencia de registro simbólico es un factor importante de fracaso. Sin embargo, una pregunta planteada por el delicado análisis, sin resolver lo que es realmente, es que la comprensión conceptual del vector, como parte de un espacio formal del vector y la capacidad de convertir al registro simbólico, es la causa o efecto.

Para Joel Hillel y Anna Sierpinska (1995), la comprensión del Álgebra Lineal requiere que los estudiantes empiecen a pensar en objetos y operadores de álgebra no en términos de relaciones entre matrices, vectores u operadores particulares, sino en términos de estructuras enteras de objetos como: espacios vectoriales sobre álgebras y clases de operadores lineales, que pueden ser transformados, representados de diferentes maneras y considerados como o no isomorfos. Los autores utilizan el enfoque de Piaget y García (1989) Intra, inter y trans-nivel de pensamiento.

Hillel y Sierpinska asocian esta dificultad con la complejidad de los vínculos entre varios tipos de lenguajes. El lenguaje de la teoría general (espacio vectorial, subespacio, dimensión, operadores, kernel, etc.) llamado lanzamiento abstracto. El lenguaje de la teoría más específica de K"(tupla, matriz, rango, soluciones de un sistema de ecuaciones, etc.) llamado lenguaje algebraico. El lenguaje geométrico del espacio bidimensional o tridimensional (vector geométrico, puntos, líneas, planos y transformaciones geométricas) denominado lenguaje geométrico.

Anna Sierpinska, Asrtrid Defence, Tsolaire Khatcherian y Luis Saldanha , estos autores distinguen tres modos de razonamiento (o pensamiento) en el trabajo conjunto en Álgebra Lineal; los describen como sintético-geométricos, analítico-aritméticos y analítico-estructurales.

Así, Sierpinska et al. no consideran los modos de pensamiento geométrico, analítico, aritmético y estructural, como etapas en la evolución del pensamiento algebraico, sino como formas de razonar y ver cosas que son útiles; especialmente cuando están en interacción. Así es como se proponen ver su papel en la enseñanza.

Sin embargo, algunos ejemplos también muestran que los estudiantes no siempre prefieren un argumento analítico-aritmético para un argumento estructural o un argumento aritmético-geométrico, sintético, analíticamente argumento. El análisis de los autores sugiere que los estudiantes pueden ser muy creativos en el razonamiento.

Alves Dias se centra en los problemas de articulación entre diferentes representaciones simbólicas de los sistemas de Álgebra Lineal, (Alves - Dias. 1993) y (Alves - Dias y Artigue, 1995), muestran que las primeras nociones son, por lo general, introducidas algebraicamente: la representación simbólica intrínseca, la representación por coordenadas, la representación por ecuaciones y matrices.

Mostraron una dificultad fuerte para que los estudiantes usen los conceptos de Álgebra Lineal en marcos formales, fuera de las tareas rutinarias, donde se puede poner en práctica una técnica precisa. Estos análisis han permitido especificar la naturaleza de lo que los autores han llamado el obstáculo del formalismo. Muestran que más que cualquier otro contenido, enseñado al mismo nivel, la teoría de espacios vectoriales aparece como un dominio abstracto y formal para los estudiantes que se sienten ahogados por las nuevas definiciones y les resulta difícil relacionarse con lo que tienen previamente aprendido (Dorier, 1998).

Los primeros estudios históricos (1990a Robinet 1986 Dorier, parte 1) mostraron que la teoría de espacios vectoriales era muy reciente. Aunque los primeros intentos de axiomatización datan de finales del siglo XIX, la teoría de los espacios vectoriales no comenzó hasta 1930. Durante más de 40 años, los enfoques analíticos (predominantemente basados en la teoría determinante) han prevalecido. Así, el análisis histórico muestra las complejidades epistemológicas relacionadas con la adopción de la teoría axiomática de espacios vectoriales como marco para el tratamiento de problemas lineales.

El formalismo es, por su parte, intrínseca a la misma teoría, y aparece como un requisito previo para la unificación y generalizar aspectos.

Las condiciones descritas anteriormente sugieren la dificultad didáctica. De hecho, ¿cómo explicar esta dimensión epistemológica del Álgebra Lineal en su enseñanza? Más precisamente, ¿cómo podemos mostrar en un solo problema, o incluso en varios, el interés de tal teoría, que es justamente hacer posible unificar varios promoviendo generalizaciones? Esta dificultad fue examinada al principio de la investigación de Dorier-Robert-Robinet-Rogalski.

Fue en este proceso dialéctico de reflexión epistemológica entre análisis histórico y análisis didáctico que se constituyó un enfoque basado en la noción de apalancamiento meta. Esta noción había sido introducida por Robert y Robinet (1993 y 1996).

Los primeros análisis didácticos revelaron dificultades en el uso de la definición formal de este concepto de dependencia lineal. Por otra parte, al pedirle a los estudiantes, que han dado una respuesta falsa, ilustrar la geometría propuesta, la mayoría se dan cuenta inmediatamente de que hay un error; sin embargo, no son capaces de identificarlo.

En las principales etapas del desarrollo histórico, la dependencia lineal se basa en el estudio de sistemas de ecuaciones lineales. Uno de los primeros textos que ponen explícitamente este concepto hacia adelante se debe a Leonhard Euler y se titula: *Sur une Contradiction Apparente dans la Doctrine des Lignes Courhes*, que data de 1750. Euler analiza la llamada paradoja de Cramer. El estudio del problema lleva a cuestionar el hecho de que un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas siempre determina una solución única, que es, al parecer, era el momento implícitamente admitido por todos.

Ousman (1996), en su trabajo ha demostrado que los estudiantes universitarios (antes de la enseñanza del álgebra lineal) tienen concepciones similares de dependencia inclusiva en las ecuaciones lineales. Pero las dificultades de los estudiantes no muestran que una resistencia de su concepción de dependencia inclusiva impida un buen uso de la definición formal.

Esta observación los lleva a la hipótesis de que la dificultad didáctica es en realidad más global, procede del proceso de generalización en el trabajo en la transición a la teoría de los espacios vectoriales.

Desde un punto de vista lógico, existe una equivalencia de concepciones primitivas con el concepto formal en cada uno de sus campos de aplicación. Este doble análisis histórico-didáctico muestra que la dificultad consiste en acceder al concepto formal a través de un proceso que tenga en cuenta las concepciones primitivas y las características epistemológicas de este tipo de generalización unificadora.

Se trata básicamente de introducir un «salto cualitativo» desde el comienzo de la formación universitaria del Álgebra Lineal, en sustitución de la resolución de problemas por la del estudio más teórico de los sistemas.

MATERIAL Y MÉTODOS

La enseñanza del algebra lineal a nivel universitario. Análisis didáctico y epistemológico

Lalaude (2016), en su investigación comenta experiencias que ha tenido al desarrollar su investigación con estudiantes de nivel universitario precisamente en la asignatura de álgebra lineal, presenta una síntesis de varios trabajos realizados sobre didáctica de la matemática en la enseñanza y aprendizaje del Álgebra Lineal.

Al respecto dice, que la linealidad aparece como un concepto esencial en matemáticas (Ellenberg, 2014) y por su enseñanza (Rouche, 2002). Desempeña un papel decisivo en la enseñanza de álgebra.

Así mismo comenta que, a nivel de la educación superior, el álgebra lineal es un dominio o campo matemático en el currículo de la mayoría de las materias matemáticas que se enseñan. Este es el caso de las Clases de Preparación con las Grandes Escuelas (CPGE) en el que basa su trabajo.

El propósito de Lalaude, en su obra es tratar las transformaciones lineales en espacios vectoriales finito-dimensionales mediante los métodos de las teorías más generales. (Halmos, 1942, prefacio, pag. V).

Por lo tanto, su trabajo de investigación en didáctica se refiere a este objeto de aplicación como un objeto de enseñanza dentro del CPGE.

La investigación de Lalaude, tiene su origen en las dificultades que los estudiantes encuentran cuando, en situaciones de resolución de problemas de álgebra lineal, utilizan ciertas nociones matemáticas abstractas para realizar un cálculo o para elaborar un razonamiento algebraico. En particular, los objetos del álgebra lineal parecen ser un obstáculo en el marco institucional del CPGE que Dorier (1997) llama "el obstáculo del formalismo", donde los estudiantes tienen dificultad para poner significado de ciertos conceptos, por falta de conexión con sus conocimientos previos. Como resultado, la conducta, la observación y el análisis de numerosas sesiones de preguntas orales realizadas en diferentes niveles de clases de CPGE los llevaron a encontrar dificultades recurrentes para hacer frente a problemas de álgebra lineal.

Al principio, surgen interrogantes acerca de los diferentes enfoques considerados en la educación superior para introducir y facilitar la apropiación y el uso de las cosas "espacio vectorial" y "aplicaciones lineales". Surgieron dos prácticas epistemológicas distintas de abordar en la enseñanza de álgebra lineal:

- Un enfoque, que Lalaude, le llama por ahora digital y basado en la noción de sistema lineal y matriz asociada. Este enfoque, iniciado por Mc Duffee en 1943, se destaca en los años 70 por la literatura anglosajona, entre ellas la de Anton publicó en 1973 y promovida en 1993 por el currículo de Álgebra Lineal Recomendaciones del Grupo de Estudio (recomendaciones LACSG): Un curso orientado a la matriz debe proceder de ejemplos concretos, y en muchos casos prácticos, al desarrollo de conceptos generales (...) (Carlson et al., 1992, p.42)
- Un método más formal y estructural en el que los espacios vectoriales definidos axiomáticamente, se hereda Noether y Van Der Waerden popularizaron entre otros por Birkho y Mac Lane (1941) y Bourbaki (1947) es un enfoque "tradicional" a la enseñanza de álgebra lineal.

Asimismo, Lalaude encuentra una presentación axiomática en la mayoría de los libros franceses destinados a los estudiantes de educación superior en licenciatura y CPGE en particular. Más específicamente, para entender las nociones de aplicaciones lineales y matriciales, dos caminos parecen concebibles: basándose en el cálculo matricial para introducir nociones de aplicación lineal o incluso espacio vectorial o, por otro lado, construir el objeto matriz después de definir aplicación lineal. En relación con estas discusiones, esboza algunas preguntas que motivan su investigación didáctica. Luego se propone definir los contornos de un breve estado del arte del trabajo relacionado con su problemática. Sus preguntas se refieren a ciertas nociones del álgebra lineal y la enseñanza durante los dos primeros años de CPGE. Además de las preguntas relacionadas con los conceptos mismos, hay fenómenos de transición que enfrentan los estudiantes cuando pasan de la educación secundaria a la educación superior, o incluso entre el primer y segundo año de CPGE. El trabajo previo que presenta al menos uno de estos temas, los conceptos de álgebra lineal o las preguntas de transición.

Por lo tanto, de las reflexiones sobre la enseñanza de álgebra lineal, se encuentra ante un reflejo de naturaleza didáctica. De hecho, para dar respuestas a las preguntas que se plantea, primero debe determinar cómo mostrar las prácticas, los razonamientos y los procesos de aprendizaje involucrados en las situaciones de enseñanza que desea estudiar. Luego, en un segundo paso, analiza cuidadosamente lo que se observa estrictamente de acuerdo con las habilidades y conocimientos de los estudiantes, así como con sus modos de razonamiento.

RESULTADOS

La enseñanza de las matemáticas, como ciencia de las condiciones específicas de la difusión del conocimiento matemático (Brousseau, 1994, p.52), proporciona un marco de trabajo. “para evaluar la capacidad de un estudiante para movilizar su conocimiento de un problema, para evaluar su comprensión de los objetos matemáticos, debemos proceder a un análisis del razonamiento complejo que él produce. Para llevar a cabo un análisis de razonamiento complejo, hay que contar con herramientas teóricas de aprendizaje para el nivel de educación y la complejidad de los objetos matemáticos estudiados, así como en experimentos diseñados para responder específicamente a las preguntas planteadas” (Lalaude, 2016).

Así mismo, explica como estructura su investigación. Para abordar las preguntas de su investigación, procede hacerlo en dos partes. En una primera parte, más bien teórica, comienza proporcionando una visión general del trabajo educativo sobre preguntas relacionadas con álgebra lineal, relativas a la transición entre los fenómenos secundarios y superiores. En la segunda parte se presenta la metodología que adopta para proporcionar respuestas a las preguntas didácticas, aquí es más experimental, tiene la intención de llevar a cabo un análisis de razonamiento para identificar dificultades producidos por los estudiantes en una situación de preguntas orales.

A través del análisis de los libros y programas de estudio, aclara el razonamiento, el conocimiento que se puede esperar de un estudiante CPGE sobre aplicaciones lineales. Luego, utiliza entre otros la noción de organización matemática de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Hace un análisis semiótico de una situación matemática priori basándose en un patrón semántico. Utiliza el modelo terminado Bloch y Gibel (2011), que analizan el razonamiento de la situación; es decir, hace hincapié en la Teoría de Situaciones Didácticas con la Semiótica de Peirce.

DISCUSIÓN

Desde los diversos enfoques teóricos, el análisis del conocimiento en su dimensión histórica y epistemológica nos permite comprender mejor ciertas dificultades a las que se enfrentaban los estudiantes con el objetivo de introducir los conceptos de Álgebra Lineal.

REFERENCIAS

Dorier, J. (1998). État de L’art de la Recherche en Didactique à Propos de L'enseignement de L'algèbre Linéaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. I8, n°2.pag. 191-230. 1998.

Dorier, J. (2000). *Epistemological Analysis of the Genesis of the Theory of Vector Spaces. The Teaching of Lineur Algebra in Question*. Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.

Lalaude, M. (2016). *L'enseignement de L'algèbre Linéaire au Niveau Universitaire. Analyse Didactique et Épistémologique. Thèse Didactique des Mathématiques. Laboratoire de Mathématiques et de Leurs Applications*. Université de Pau et des Pays de l'Adour. UMR CNRS 5142.