Quintaesencia
Revista de Educación
ISSN 2076-5363 (en línea)

Quintaesencia [(2019), vol. 10, pp. 10-16]
DOI: https://doi.org/10.54943/rq.v10i.116

Artículo original

Los sistemas de ecuaciones lineales como instrumento de modelización en la secundaria

Systems of linear equations as a modeling tool in secondary school

Magaly Ethel Campos Motta [1, a] **Rosa Cecilia Gaita Iparraguirre** [2, b]

[1] Pontificia Universidad Católica del Perú-IREM, Perú
[a] ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5890-8458

[2] Pontificia Universidad Católica del Perú, IREM, Perú
[b] ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7827-9262

cgaita@pucp.edu.pe

Información

Recibido: 19/05/2019.
Aceptado: 20/09/2019.

Palabras clave:

Modelización algebraica, ecuaciones, Teoría Antropológica de lo Didáctico.

Resumen

El presente reporte forma parte de un trabajo más amplio, cuyo objetivo fue construir un modelo epistemológico de referencia para que los sistemas de ecuaciones lineales cumplan el rol de instrumento de modelización en la educación secundaria y verificar, además, si satisfacen los rasgos característicos en el sentido de Bolea. En esta presentación nos centraremos en mostrar qué significa adoptar el álgebra como instrumento de modelización algebraica, a través de un caso concreto como son los sistemas de ecuaciones lineales. El presente reporte se enmarca en el ámbito de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), de la que se consideran algunos elementos teóricos como son la modelización algebraica y los rasgos que la caracterizan. Asimismo, consideraremos a la TAD como método de investigación. Como resultado se obtuvo que es posible realizar una modelización algebraica a través del tratamiento de los sistemas de ecuaciones lineales.

Information

Keywords:

Algebraic modeling, equations, Anthropological Theory of the Didactic.

Abstract

This report is part of a broader work, whose objective was to build an epistemological reference model for systems of linear equations to fulfill the role of modeling instrument in secondary education and also verify if they satisfy the characteristic features in the sense of Bowl. In this presentation we will focus on showing what it means to adopt algebra as an algebraic modeling tool, through a specific case such as systems of linear equations. This report is part of the Anthropological Theory of Didactics (ADT), of which some theoretical elements are considered, such as algebraic modeling and the features that characterize it. Likewise, we will consider the TAD as a research method. As a result, it was obtained that it is possible to carry out an algebraic modeling through the treatment of systems of linear equations.

INTRODUCCIÓN

En las tres últimas décadas diversos investigadores del ámbito de la didáctica de la matemática, se han dedicado a estudiar las diferentes posturas del álgebra. Chevallard (1994) hizo un estudio de lo que es el álgebra, encontrando así que en un inicio esto era concebido como todo aquello que no era geometría. Con el pasar del tiempo, esta idea fue cambiando y más bien el álgebra era entendida como todo lo que giraba en torno a la teoría de ecuaciones. Posteriormente, Gascón (1994) admite la presencia de una nueva forma de ver el álgebra, el mismo que resultaba de la generalización de las prácticas aritméticas.

Por otro lado, Bolea, Bosch y Gascón (2001) conciben el álgebra como un instrumento de modelización, el mismo que pasa a ser el nuevo modelo del álgebra elemental en el ámbito de la TAD. En esta misma línea, Bolea (2002) establece los rasgos para caracterizar este nuevo modelo.

Siguiendo la misma idea, es preciso señalar que nuestro reporte va considerar el álgebra como instrumento de modelización, lo que significa trabajar con una organización matemática inicial para que posteriormente esta sea ampliada en el sentido de Chevallard, según lo manifiesta Sierra (2006).

En el presente reporte, mostraremos los pasos necesarios para llevar a cabo una modelización algebraica tomando en cuenta los sistemas de ecuaciones lineales visto en el trabajo de Campos (2017).

Asimismo, cabe señalar que Bolea (2002) considera cuatro estadios para llevar a cabo una modelización algebraica, los cuales detallaremos a continuación según lo manifiesta la autora. El ***primer estadio*** trata de la problemática inicial, el cual consiste en tomar una situación problemática de índole intramatemática o extramatemática, con las cuestiones que surgen acerca del sistema inicial y que en un primer momento no tienen respuesta inmediata. El ***segundo estadio***, se encarga de la construcción del modelo matemático en sí, en donde se define el sistema, así como las variables y las relaciones que existen entre ellas. En este estadio, la investigadora señala que las técnicas empleadas para poder construir dicho modelo pueden organizarse por niveles de complejidad creciente.

El ***tercer estadio***, está relacionado al trabajo del modelo; esto significa que ahora pueden ser resueltas las diversas cuestiones que, en un inicio, no tenían respuesta inmediata. Finalmente, la autora señala que el ***cuarto estadio***, tiene que ver con la posibilidad de enunciar problemas nuevos, cuya solución no hubiese sido posible si no hubiésemos ampliado el sistema inicial.

Asimismo, consideramos que los sistemas de ecuaciones lineales son importantes como objeto de estudio, ya que de acuerdo al Currículo Nacional de la Educación Básica Regular del Perú (Ministerio de Educación del Perú, 2016), su estudio ocupa un lugar significativo dentro del nivel secundario de nuestro país, ya que este tema es transversal a lo largo de la educación secundaria. Dicho todo esto, podemos afirmar que este es un tema relevante en el desarrollo de los contenidos específicos de las ciencias. Debido a ello, tiene sentido hacer nuestro estudio en torno al objeto matemático sistemas de ecuaciones lineales, ya que hay una serie de investigaciones en la educación matemática que avalan la importancia de su estudio desde los diferentes enfoques, tanto del nivel secundario como del nivel universitario, según lo manifiesta Arenas (2013).

Dicho todo esto, es preciso señalar que en este reporte vamos a usar a los sistemas de ecuaciones lineales como tema para ejemplificar la concepción del álgebra como instrumento de modelización algebraica.

MATERIAL Y MÉTODOS

La modelización algebraica:

La modelización algebraica se desarrolla teniendo en cuenta los estadios ya descritos anteriormente, según lo manifiesta Bolea (2002); lo cual va ser ejemplificado con la modelización algebraica llevada a cabo en el trabajo de Campos (2017) de la siguiente manera:

Primer estadio

a) El sistema a modelizar:

Primero debemos establecer una organización matemática, pues la modelización algebraica actúa sobre una organización matemática y no sobre cualquier sistema inicial.

Sistema Inicial: Organización Matemática S

Esta organización matemática S es generada por los tipos de tareas cuyo planteamiento puede ser representado de la siguiente manera:

$$\begin{cases} AX+Y+C=0 \\ Y+F=0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} AX+Y+C=0 \\ X+F=0 \end{cases}$$

donde A, C, F $\in$ ¡ y son constantes conocidas, tal que $A \neq 0$. Por ejemplo, el siguiente tipo de tareas:

T_1 : Dada la ecuación de la recta L y un punto $P \in L$. Si se conoce una de las coordenadas del punto P, determine el valor de la otra coordenada.

t_1 : Sea la ecuación de la recta $L: y = -x - 2$. Si el punto $P(a,1) \in L$, determine el valor de a .

La técnica asociada al sistema inicial S se basa en una cadena de operaciones aritméticas y en la sustitución. Con respecto al bloque tecnológico-teórico podemos ver que se reduce esencialmente al empleo de las magnitudes (longitud, ángulo plano, etc.), de las operaciones y relaciones que existen entre ellas; así como las propiedades que existen en un determinado marco o contexto de la matemática.

Observamos que esta OM no tiene la necesidad de usar la noción de sistema de ecuaciones lineales, pues la técnica de esta OM es a través de operaciones aritméticas y luego el empleo de la sustitución. Además, la técnica puede ser reducida al uso de la siguiente fórmula:

$$X = \frac{F - C}{A} \quad , \quad Y = -F \qquad (f1)$$

b) Las cuestiones generales

Vemos que en la OM inicial aparecen problemas en donde la técnica fracasa; por ejemplo, como no podemos determinar el valor de "b" a través de operaciones aritméticas en el siguiente problema:

t_2 : En el monomio $M(x,y) = x^{2a-b}y^{5a+2b}$. Si $G.A. = 30$ y $G.R.(x) = 6$, determine el valor de $a+b$

Esta tarea la podemos plantear de la siguiente manera:

$$\begin{cases} 7a + b - 30 = 0 \\ b + (-2a + 6) = 0 \end{cases}$$

en donde si aplicamos la técnica (f1) de la OM inicial S obtenemos:

$$a = \frac{36 - 2a}{7}; \; b = 2a - 6 .$$

con lo cual se puede observar que no podemos dar solución al problema.

Segundo estadio

c) – d) La definición del sistema y el establecimiento de las relaciones entre las variables.

En este estadio se define una serie de pasos para poder resolver el problema planteado, tal y como lo define Campos (2017) en su trabajo. Entre ellas, además se definen las restricciones que debe satisfacer el problema.

Tercer estadio

e) El trabajo manipulativo

Considerando el problema anterior, vamos a manipularlo para poder así obtener una técnica que nos permita dar solución a dicho problema.

Sea $M(x, y) = x^{2a-b}y^{5a+2b}$

Como G.A = 30 y G.R (x) = 6, se tiene:

$2a - b + 5a + 2b = 30$ y $2a - b = 6$.

Esto es $7a + b = 30$ y $b - 2a = -6$

Entonces obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 7a + b - 30 = 0 \\ b - 2a + 6 = 0 \end{cases}$$

Luego

$$\begin{cases} 7a + b - 30 = 0 \\ b = 2a - 6 \end{cases}$$

Luego sustituimos el valor de *b*.

$7a + 2a - 6 - 30 = 0$, entonces el valor de $a = 4$.

Sustituimos el valor de $a = 4$ en $b = 2a - 6$

Luego el valor de $b = 2$

La solución de la ecuación es: $\begin{cases} a = 4 \\ b = 2 \end{cases}$

Por lo tanto: $a + b = 6$.

f) La interpretación del trabajo

A partir del trabajo manipulativo que se llevó a cabo obtenemos respuestas a las tareas cuyo planteamiento viene dado por un sistema que tiene la siguiente forma:

$$\begin{cases} AX + BY + C = 0 \\ DX + Y + F = 0 \end{cases} \quad ; \quad A \neq B.D\ .$$

Cuarto estadio

Entonces la tarea trabajada (En el monomio $M(x, y) = x^{2a-b} y^{5a+2b}$. Si $G.A. = 30$ y $G.R.(x) = 6$, determine el valor de $a + b$), se incorpora a la organización.

Dicho todo esto, nuestro objetivo es mostrar la modelización algebraica respecto a un sistema inicial. De aquí, podemos ver que surge la organización matemática S_1 generada por los tipos de tareas cuyo planteamiento puede ser representado de la siguiente manera:

$$\begin{cases} AX + BY + C = 0 \\ DX + Y + F = 0 \end{cases} \quad ; \quad A \neq B.D$$

donde $A, B, C, D, F \in$ ¡ y son constantes conocidas.

Técnica: Operaciones de expresiones algebraicas y sustitución de una expresión a otra.

Tecnología: Propiedades de las magnitudes y de las relaciones que existen entre ellas, teniendo presente las propiedades que existen en cada uno de los contextos de la matemática, así como las propiedades de expresiones algebraicas.

Teoría: Teoría de ecuaciones.

Esta modelización matemática es una ***modelización algebraica*** pues modeliza explícitamente y materializa la técnica de S_1, haciendo parte la técnica de S a S_1 para provocar el rápido desarrollo de las mismas. Por ejemplo, en esta organización matemática S_1, podemos ver que la técnica puede ser reducida a la siguiente fórmula:

$$X = \frac{B.F - C}{A - B.D} \quad , \qquad Y = -F - DX \qquad\qquad (f2)$$

También observamos que no tan solo la técnica se incorpora a la nueva técnica sino también el bloque tecnológico-teórico, los cuales son los rasgos característicos de la modelización algebraica.

En el trabajo de Campos (2017) se efectúa este proceso de modelización algebraica hasta la organización matemática S_4.

Rasgos característicos de la modelización algebraica

Una vez que se ha elaborado una propuesta de una organización matemática cada vez más amplia y de complejidad creciente, es necesario que sea validada. Para ello, vamos a apoyarnos en los rasgos característicos propios de una modelización algebraica, según lo manifiesta Bolea (2002).

RESULTADOS

Primer rasgo característico

El primer rasgo característico tiene que ver con la modelización, tanto explícita como materialmente de las técnicas matemáticas, que forman parte de la organización matemática a modelizar. Esto significa que una vez que sea llevada a cabo dicha modelización, las técnicas pueden ser tratadas como nuevos objetos matemáticos; lo cual, sin lugar a dudas, posibilitará y provocará, incluso, el rápido desarrollo de las mismas.

Con respecto al primer rasgo característico de nuestra propuesta, Campos (2017) señala que la técnica de S_3 permite modelizar la técnica del sistema inicial S, en el sentido de que la técnica en S_3 resulta de la generalización de la técnica dada en el sistema inicial S, ya que resuelve, así, los tipos de problemas que pueden ser catalogados a lo largo de los diferentes sistemas que hemos considerado en nuestra propuesta para poder ir del sistema inicial S y llegar al sistema S_3.

Asimismo, en el sistema S_3 una vez aplicada la técnica, se puede establecer fórmulas, la cual se manipula como un objeto matemático independiente, lo cual permitirá el rápido desarrollo de las mismas; por ejemplo, Campos (2017) indica que en el caso de la organización matemática S_2 se tiene que:

$$X = \frac{B.F - C.E}{A.E - B.D}.$$

Segundo rasgo característico

Bolea (2002) señala que el segundo rasgo característico se refiere a la modelización de todos los componentes de la organización matemática que hace el papel de sistema. La autora manifiesta que no solo se limitan a modelizar de manera aislada alguno de los componentes de la organización matemática.

Con respecto al segundo rasgo característico, las organizaciones matemáticas presentadas que han sido algebrizadas a lo largo de los diferentes sistemas, resultan de prolongar y extender la organización matemática inicial, donde el modelo final se basa precisamente en ampliar todos los componentes de la organización matemática:

Campos (2017) señala, por ejemplo, que:

S_2 : generado por los tipos de tareas cuyo planteamiento va ser representado de la siguiente manera:

$$\begin{cases} AX + BY + C = 0 \\ DX + EY + F = 0 \end{cases} \quad ; \quad AE - BD \neq 0$$

donde $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$, las cuales son constantes conocidas.

Técnica: Para materializar la nueva técnica, debemos utilizar ecuaciones equivalentes en el último sistema y operaciones aritméticas; así, podemos escribirlo en términos de la organización matemática S_1.

Tecnología: Relaciones y/o propiedades que existen en cada contexto de la matemática, así como las propiedades de expresiones algebraicas y las definiciones de las ecuaciones equivalentes.

Teoría: Teoría de las ecuaciones.

S_3: generada por los tipos de tareas cuyo planteamiento será representado de la siguiente manera:

$$\begin{cases} AX + BY + C = 0 \\ DX + EY + F = 0 \end{cases}$$

donde $A, B, D, E, F \in \mathbb{R}$, y son constantes conocidas, y C es el parámetro que toma valores en $\mathbb{R}$.

Técnica: La técnica que podemos emplear para la OM ampliada, S_3, se basa en la sustitución, las operaciones de expresiones algebraicas, el uso de las ecuaciones equivalentes y, además, encontrar un conjunto específico del cual se puede obtener los valores de los parámetros, o sea de los términos desconocidos.

Tecnología: Con respecto a la tecnología podemos decir que el uso de esta técnica está respaldado por las ecuaciones equivalentes, y las operaciones en los números reales, ya que $\mathbb{R}$ es un cuerpo.

Teoría: Teoría de ecuaciones y teoría de cuerpos.

Además, las características de la modelización como instrumento de modelización son las siguientes, las mismas que son presentadas en la modelización realizada en el trabajo de Campos (2017):

MA1: Como hemos podido ver, los sistemas de ecuaciones lineales son instrumentos valiosos para resolver problemas de sistemas conocidos matemáticos o extra matemáticos: aritméticos, geométricos, físicos, comerciales, de la vida cotidiana, etcétera.

MA3: El instrumento algebraico permite plantear y resolver problemas de diferentes ámbitos matemáticos (aritméticos, geométricos, combinatorios, comerciales, etc.) que son muy difíciles de plantear y resolver sin la noción de sistemas de ecuaciones lineales.

MA5: Algunas de las mejores situaciones para introducir los sistemas de ecuaciones lineales son los problemas en los cuales intervienen dos variables desconocidas o más y que, por ello, no pueden resolverse mediante técnicas directas aritméticas o geométricas.

MA6: Dado que los sistemas de ecuaciones lineales surgen inicialmente como herramientas de modelización de sistemas matemáticos o extra matemáticos, es necesario conocer mínimamente el sistema que se quiere modelizar y, en particular, las limitaciones del trabajo dentro de este sistema; que, en este caso, viene dado por las restricciones, las cuales dependerán del ámbito en el que se trabaje.

DISCUSIÓN

Por otro lado, podemos observar que nuestro objeto matemático sistemas de ecuaciones lineales es un instrumento de modelización, ya que ha funcionado como instrumento para modelizar los diferentes tipos de tareas en los diversos ámbitos de la matemática del nivel secundario, como lo hemos podido mostrar al hacer explícita la construcción de la organización matemática de complejidad creciente.

En este sentido, cabe mencionar que nuestro interés es modelizar los diferentes tipos de tareas que se encuentran relacionados a otros temas que nos generan sistemas de ecuaciones lineales y puedan ser reducidos a los diferentes sistemas que hemos considerado en nuestra propuesta; como por ejemplo dentro del ámbito de la geometría analítica, problemas relacionados a las funciones que nos obligan a usar finalmente los sistemas de ecuaciones lineales, etc.

Dicho esto, podemos, finalmente, concluir que los sistemas de ecuaciones lineales cumplen ese rol de instrumento modelizador.

REFERENCIAS

Arenas, B. (2013). *Las ecuaciones lineales, desde situaciones cotidianas* (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.

Bolea, P., Bosch, M. y Gascón, J. (2001). La Transposición Didáctica de Organizaciones Matemáticas en Proceso de Algebrización: El caso de la Proporcionalidad. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *21*(3), 247-304.

Bolea, P. (2002). *El Proceso de Algebrización de Organizaciones Matemáticas Escolares*. Tesis Doctoral. Universidad de Zaragoza. España.

Campos, M. (2017). *Los Sistemas de Ecuaciones Lineales como instrumento de modelización en la Secundaria*. Tesis de Maestría. Pontificia Universidad Católica del Perú. Lima - Perú.

Chevallard, Y. (1994). Enseignement de l'algebre et transposition didáctique. *IREM d' Aix – Marseille, 52* (2), pp. 175-234.

Gascón, J. (1994). Un nouveau modele de l'algebre elementaire comme alternative à l' «arithmétique généralisée». *Petit x*, 37, 43-63.

Ministerio de Educación del Perú (2016). Currículo Nacional de Educación Básica Regular. Proceso de Articulación. Recuperado de:

http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/curriculo-nacional-2016-2.pdf

Sierra, T. (2006). *Lo Matemático en el diseño y análisis de Organizaciones Didácticas. Los Sistemas de Numeración y la Medida de Magnitudes Continuas.* Tesis Doctoral. Universidad Complutense de Madrid. España.