

Artículo original

Una organización y modelización matemática aplicado en el caso de las sucesiones en un texto de primaria

An organization and mathematical modeling applied in the case of sequences in a primary text

Elvis Bustamante Ramos ¹

Francisco Javier Ugarte Guerra ^{2, a}

¹ Pontificia Universidad Católica del Perú-IREM, Perú

² Pontificia Universidad Católica del Perú, IREM, Perú

^a ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5071-8924>

fugarte@pucp.edu.pe

Información

Recibido: 12/06/2019.

Aceptado: 28/09/2019.

Palabras clave:

Modelización matemática, sucesiones, Teoría Antropológica de lo Didáctico.

Information

Keywords:

Mathematical modeling, successions, Anthropological Theory of Didactics.

Resumen

Este trabajo forma parte de una investigación más amplia enmarcada en el ámbito de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), cuyo objetivo fue construir un modelo epistemológico de referencia (MER) asociado a la sucesión. En lo que sigue mostraremos la reconstrucción de una Organización Matemática (OM) asociada a sucesión y, a continuación, la construcción de otra OM por medio de la modelización matemática. Ello nos permitirá evidenciar la desarticulación de la OM reconstruida con las otras OM en la educación primaria y proponer una modelización matemática para el caso de las sucesiones en un texto oficial de primer año de la educación primaria.

Abstract

This work is part of a broader research framed in the field of Anthropological Theory of Didactics (TAD), whose objective was to build an epistemological reference model (MER) associated with succession. In what follows we will show the reconstruction of a mathematical organization (MO) associated with succession and then the construction of another MO by means of mathematical modeling. This will allow us to show the disarticulation of the reconstructed OM with the other OMs in primary education and to propose a mathematical modeling for the case of successions in an official text of the first year of primary education.

INTRODUCCIÓN

Reconocer la forma de organizar un conocimiento matemático es una herramienta sumamente importante; por ejemplo, para identificar cómo se entiende un objeto matemático en una institución. Existen trabajos que se han dedicado a este problema, como los de Chevallard (1999) que presenta una herramienta llamada praxeología u organización matemática, que puede describir toda actividad humana regularmente realizada. Asimismo, existen otros trabajos significativos cuyo foco de investigación están en la descripción e identificación de un conocimiento matemático específico. Uno de estos trabajos es el de Gascón (1994), el cual identifica el álgebra como una prolongación unilateral de la aritmética.

Luego, en Bolea (2002) se muestra una concepción del álgebra como un instrumento para modelizar u organizar las praxeologías presentes en una institución de un tema concreto, el cual toma el nombre de proceso de modelización algebraica. Bajo esta perspectiva, una Organización Matemática es el resultado de este proceso de modelización y, si además articulamos organizaciones matemáticas de un mismo objeto, en una institución dada, obtenemos lo que se denomina un modelo epistemológico de referencia (MER). Un aporte importante para comprender lo que conlleva un MER, es el trabajo de Sierra (2006), quien señala que una manera de construir un MER es a través de una sucesión de praxeologías, en donde

cada praxeología surge como una ampliación o desarrollo de la praxeología anterior para dar respuestas a las cuestiones planteadas en la praxeología anterior y no tenía respuesta en ella.

Por ello, el Modelo Epistemológico de Referencia representa un instrumento importante para analizar las organizaciones matemáticas y didácticas, además de proponer una organización alternativa o referencial, como lo señala Navarro (2007).

Por otra parte, la sucesión es un tema importante en la EBR, pues en el Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular del Perú (2009) indica que “Es necesario que los estudiantes internalicen, comprendan y utilicen varias formas de representar patrones” (p. 317). Por lo cual, la sucesión se encuentra en todo el nivel primario y algunos años de nivel secundario. Y si revisamos los textos oficiales del Perú, las sucesiones se encuentran en todos los textos oficiales de la educación primaria y un texto de la educación secundaria.

MATERIAL Y MÉTODOS

Reconstrucción de la Organización Matemática (OM)

Desde el ámbito de TAD, nos indica que toda actividad humana regularmente realizada puede describirse con un modelo, el de la praxeología u Organización Matemática (OM) (praxis+logos), como indica Chevallard (1999), en particular se constituye en una herramienta fundamental para modelizar la actividad matemática.

La OM, vista como un primer escalón, nos lleva a revisar o describir textos, lo cual consiste en identificar los elementos de cada bloque de la praxeología de un texto o textos de un tema para describir la organización existente en la institución elegida.

Esto se realiza con la identificación de las tareas que existen en el texto y agrupándolas en tipos de tareas; por ejemplo, en la tabla 1, extraída de Bustamante (2017), se muestra las tareas encontradas en el texto de Matemática 1 Primaria, en el caso de la sucesión.

Tabla 1

Tareas presentes en el texto oficial: Matemática 1 Primaria

	Primaria 1	Pág.
a	A Jorge le faltan semillas para terminar su pulsera (foto). ¿Qué semillas debe poner para seguir con la secuencia?	40
b	Nora hizo secuencias con sus útiles escolares (foto) ¿Qué patrón siguió en cada caso?	41
c	¿Qué útiles debo colocar en cada secuencia para continuarla? (foto)	41
d	Observa la recta numérica (foto) ¿Qué patrón siguen los números?	46
e	¿Qué figura sigue? (foto)	50

En este caso, y a manera de ejemplo, se puede agrupar estas tareas en dos tipos:

T1: Dada una sucesión, indicar el elemento que continúa.

T2: Dada una sucesión, indique el patrón de la sucesión.

Las tareas *a*, *b*, *c* y *e* corresponden a **T1** y la tarea *d* corresponde a **T2**.

Luego, en el texto Matemática 1 Primaria, no se observa una técnica en forma explícita, pero a partir de los ejemplos desarrollados se desprende la siguiente técnica:

- Observar los objetos (figuras) y encontrar un patrón.
- Completar la secuencia en base del patrón hallado.

En este caso, el bloque tecnológico y teórico no aparece en forma explícita en el texto, lo que Bolea (2002) llama una OM no bien delimitada, como se muestra en la siguiente cita: “El *álgebra escolar* no aparece explícitamente en la ESO, ni como una organización matemática bien delimitada” (Bolea, 2002, p. 108). Pero se puede considerar que la tecnología es el *conteo* y la teoría, los *números naturales*.

Además, la OM asociada a sucesión presente en el texto Matemática 2 Primaria, declara que la técnica consta de dos pasos a seguir:

- Observar si la secuencia aumenta o disminuye.
- Definir el patrón, es decir, cuánto aumenta o disminuye.

Observamos que esta técnica, aunque similar a la anterior técnica, no es la misma técnica ni una ampliación de la primera, pues no resuelve tareas relacionadas con figuras, las cuales son consideradas en la primera OM. Es decir, estas dos OM existentes en la educación primaria no se articulan.

Por otro lado, se puede considerar que la tecnología es el *conteo* y la teoría, los *números naturales*, para las OM revisadas, aunque no aparezca en forma explícita en los dos textos de primaria.

Este análisis es de utilidad para evaluar la OM; por ejemplo, en Bustamante (2017) se realizó este mismo análisis en los textos de primaria y uno de secundaria en el tema de sucesión, evidenciando que las organizaciones encontradas no están articuladas entre sí, aún más, existe una OM aislada de las demás.

Como hemos visto en este primer escalón, la reconstrucción de una OM en un texto, consiste en la presentación y el análisis de los elementos de la OM, aunque no esté en forma explícita, pero que podemos evidenciarlos, y así reconstruirlo. Existen trabajos de este tipo; por ejemplo, Carrillo (2013), Gonzales (2014), Quentasi (2015), Valentin (2016) y Tiburcio (2017).

Un segundo escalón, es construir una OM de un objeto determinado, que consiste en proponer los elementos de la praxeología que sean acorde en la institución elegida y que articule las OM existentes en la institución. Para realizar este objetivo la TAD, nos ofrece la modelización matemática.

RESULTADOS

Construcción de una OM por medio de la Modelización Matemática

Desde la TAD, una problemática es la modelización de los conocimientos matemáticos, por la cual Bolea (2002) indica que dicha Modelización Matemática se desarrolla teniendo en cuenta cuatro etapas o estadios fundamentales.

En el *primer estadio*, consiste en tomar una situación problemática de índole intramatemática o extramatemática y las cuestiones que surgen en el sistema inicial y que en un primer momento no tienen respuesta inmediata. Por ejemplo, en Bustamante (2017), se toma como sistema inicial: problemas aritmético-figurales, en la institución: primer año de primaria, donde surge el siguiente problema:

s0: Completa la secuencia.



Figura 1. Libro de texto Matemática 1 (Perú, 2012b, p. 40)

En esta primera etapa, los estudiantes no tienen herramientas para da solución al problema. Por esa razón, debemos construir una forma para da solución al problema, entonces identificaremos y definiremos las variables involucradas en el problema y las relaciones entre ellas, esto es el *segundo estadio* (construcción del modelo). En Bustamante (2017), identifica y define el primer elemento y el patrón de la sucesión para obtener el siguiente término de la sucesión, por ejemplo, en la tarea *s0*:

$$t_2 = t_1 + r.$$

Siguiendo esta idea, el autor propone la técnica que consiste de discursos verbales que, partiendo de los términos conocidos y mediante el patrón, permiten calcular el término desconocido. Este es el *tercer estadio (trabajo del modelo)*, pues esta parte se basa en la manipulación e interpretación de las relaciones establecidas y busca responder las cuestiones formuladas inicialmente. Por ejemplo, en la manipulación del primer elemento y sumarlo 100 nos lleva al segundo elemento, es decir, el trabajo del modelo sería:

La resolución aritmética (verbal) de este problema sería:

De 0 a 100, la diferencia es 100 y de 100 a 200 también es 100, entonces el patrón es sumar 100.

Entonces los elementos que siguen de la sucesión son: 300 y 400. (Bustamante, 2017, p. 58).

Podemos interpretar que el trabajo del modelo propuesto consiste en partir de términos conocidos y mediante el patrón, que está formada por operaciones aritméticas de una cantidad fija o “movimientos” de una figura, permiten calcular el término desconocido. Para justificar la técnica consideraremos las propiedades físicas que se puedan medir y el principio de contar, y la teoría de números naturales.

Con esta técnica podemos dar solución a otros problemas que surgen en este sistema inicial, y podemos indicar que estamos en el *cuarto estadio (producción de problemas nuevos)*, que consiste en enunciar nuevos problemas que antes no tenían solución respecto al sistema inicial; pero, con el nuevo modelo, encontramos solución. Por ejemplo, los siguientes problemas:

q0: ¿Cuál es la figura que sigue?

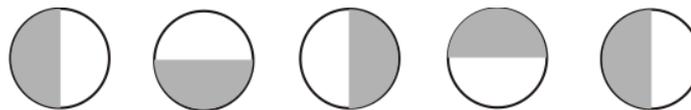


Figura 2. Sucesión de círculos / Bustamante (2017, p. 58)

c0: ¿Cuántas bolitas hay en total?



Figura 3. Sucesión de esferas / Bustamante (2017, p. 60)

Por lo tanto, los problemas anteriores son ilustraciones de las tareas que componen la OM que se obtuvo del sistema inicial y que denominaremos **S**:

S= OM en torno a problemas de sucesión aritméticos-figural + aplicación de PAF (forma retórica).

Figura 4. Organización Matemática: S / Bustamante (2017, p. 60)

En resumen, **S** es la culminación de la Modelización Matemática del sistema inicial, como se muestra en la Figura 4.

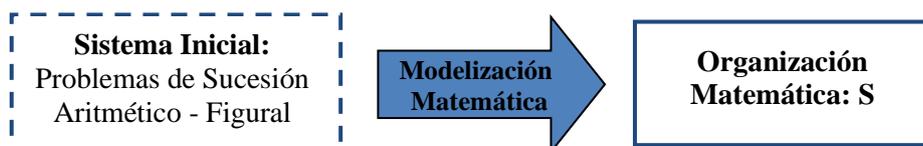


Figura 5. Organización Matemática: S / Bustamante (2017, p. 58)

Además, se consideró como el bloque *tecnológico–teórico* las propiedades físicas que se pueden medir y el principio de contar, y la teoría de números naturales.

DISCUSIÓN

Se ha mostrado la reconstrucción de una OM existente en el texto de Matemática 1 Primaria, la cual no estaba bien delimitada, y la desarticulación de esta OM con otra OM existente en el texto de Matemática 2 Primaria en el caso de sucesiones, pues la técnica de la segunda OM no es la ampliación ni adjunta la técnica de la primera OM.

Además, se muestra una construcción de una OM que articula las dos OM encontradas en los textos revisados, la cual se realizó desde el marco de la TAD que nos ofrece herramientas para el estudio de un conocimiento matemático.

REFERENCIAS

- Bolea, P. (2002). *El Proceso de Algebrización de Organizaciones Matemáticas Escolares* (Tesis doctoral). Universidad de Zaragoza, España.
- Bustamante, E. (2017). *Un modelo epistemológico de referencia asociado a las sucesiones en la educación básica regular del Perú*. (Tesis de Maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima.
- Carrillo, F. (2013). *Un estudio de las organizaciones matemáticas del objeto función cuadrática en la enseñanza superior*. (Tesis de Maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima.
- Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-266.
- Gascón, J. (1994). Un nouveau modele de l'algebre elementaire comme alternative à l'«arithmétique généralisée». *Petit* 10(37), 43-63.
- Gonzales, C. (2014). *Una praxeología matemática de proporción en un texto universitario*. (Tesis de Maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima. Recuperado de <http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/5225>
- Navarro, P. C. (2007). *Un Estudio sobre la Desarticulación entre la Semejanza y la Trigonometría en el Bachillerato*. (Tesis de Maestría). Universidad de Sonora, México.
- Perú, Ministerio de Educación (2009a). *Diseño curricular nacional de la educación básica regular*. Lima.
- Perú, Ministerio de Educación (2012b). *Matemática 1 Primaria*. Lima: Norma.
- Perú, Ministerio de Educación (2012c). *Matemática 2 Primaria*. Lima: Norma.
- Quentasi, E. (2015). *Análisis de una organización matemática de la función y la proporcionalidad directa en un libro de texto de matemáticas de educación secundaria*. (Tesis de Maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima.
- Sierra, T. (2006). *Lo Matemático en el diseño y análisis de Organizaciones Didácticas. Los Sistemas de Numeración y la Medida de Magnitudes Continuas*. Tesis Doctoral. Universidad Complutense de Madrid.
- Tiburcio, J. (2017). *Organización matemática de la función lineal y función afín en un libro de texto de segundo año de educación secundaria*. (Tesis de Maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima.
- Valentín, M. (2016). *Organización praxeológica del objeto gráficos estadísticos en el texto de tercer grado de educación primaria del ministerio de educación*. (Tesis de Maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima