

Artículo de conferencia

IX CONGRESO INTERNACIONAL SOBRE ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS
(IX CIEM-IREM PUCP, Huancavelica)

Cónicas en las geometrías del taxista y euclidiana

Conics in the taxi driver and Euclidean geometries

Nélida Salomé Medina García de Correa

Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2074-945X>

nmedina@pucp.edu.pe

Información

Recibido: 05/04/2018.

Aceptado: 02/07/2018.

Palabras clave:

Geometrías del taxista,
geometría euclidiana,
métrica, distancia,
cónicas

Information

Keywords:

Taxi driver geometries,
Euclidean geometry,
metric, distance, conics

Resumen

Para mejorar la comprensión de las cónicas, consideramos la circunferencia, elipse, hipérbola en la geometría euclidiana y la geometría del taxista. Se define cada cónica como un lugar geométrico, como un conjunto de pares ordenados de números reales que satisfacen una ecuación y como figuras que las representan en el plano tanto en la métrica euclidiana como en la métrica del taxista.

Abstract

To enhance the understanding of conics, we consider the circumference, ellipse, hyperbola in Euclidean geometry and cab geometry. Each conic is defined as a geometric locus, as a set of ordered pairs of real numbers satisfying an equation and as figures representing them in the plane in both Euclidean metric and taxicab driver metrics.

INTRODUCCIÓN

Geometrías Métricas en el plano

Consideremos un conjunto de puntos X en el plano con la estructura de espacio vectorial.

Definición 1. Una distancia o métrica d en X es una aplicación

$$d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

con las propiedades siguientes: para todo punto $P, Q, R \in X$

- 1) $d(P, Q) \geq 0$, $d(P, Q) = 0$ si y sólo si $P = Q$
- 2) $d(P, Q) = d(Q, P)$
- 3) $d(P, R) \leq d(P, Q) + d(Q, R)$.

Un par (X, d) se llama espacio métrico.

Consideremos $X = \mathbb{R}^2 = \{P = (x, y): x, y \in \mathbb{R}\}$ con la estructura de espacio vectorial.

La función d_E definida por

$$d_E((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

cumple las condiciones de la definición 1, así que es una distancia. Es llamada distancia euclidiana. Es motivada por la longitud de un vector en el plano obtenida usando el Teorema de Pitágoras. El par (\mathbb{R}^2, d_E) se denomina geometría métrica euclidiana.

La función d_T dada por

$$d_T((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$$

También cumple las condiciones de la definición 1. Es llamada distancia del taxista o de Manhattan. Es una distancia usada en espacios métricos.

Para todo par de puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ del plano \mathbb{R}^2 se cumple la desigualdad

$$d_E((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \leq d_T((x_1, y_1), (x_2, y_2))$$

muy útil en topología.

Cónicas en las Geometrías Euclidiana y del Taxista

Definición 2. Una circunferencia C es el lugar geométrico de los puntos de un plano equidistantes de un punto fijo llamado centro.

Circunferencia con centro el punto $C = (a, b)$ y radio r

$$C = \{P : d(P, C) = r\}.$$

En la geometría euclidiana,

$$C_E = \{P(x, y) : \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r\}.$$

En la geometría del taxista

$$C_T = \{P(x, y) : |x - a| + |y - b| = r\}.$$

Trazamos la gráfica de C_T .

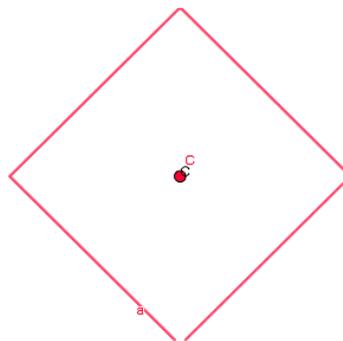


Figura 1. Circunferencia C_T .

La longitud de la circunferencia C_T es $4\sqrt{2} r$ y el área de la región limitada por C_T es $2r^2$.

Mostramos las gráficas de una circunferencia de centro $C(1,1)$ y radio 3 en G_T y G_E , cuyas ecuaciones son

$$C_T: |x - 1| + |y - 1| = 3$$

$$C_E: \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 1)^2} = 3.$$

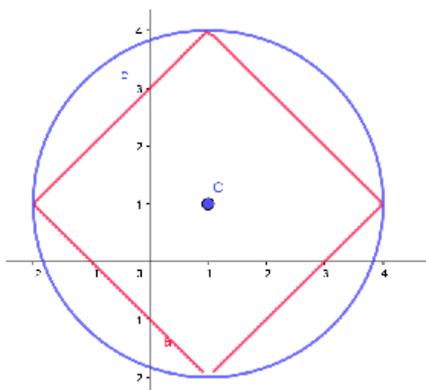


Figura 2. Circunferencias C_T y C_E .

Definición 3. Dados una recta L y un punto $F \notin L$, la parábola \mathcal{P} con foco F y directriz L es el lugar geométrico de los puntos P del plano cuyas distancias a F y L son iguales. Es decir,

$$\mathcal{P} = \{P: d(P, F) = d(P, L)\}.$$

las ecuaciones de las parábolas con foco $F = (a, b)$ y directriz $L: mx + ny + c = 0$ en la métrica del taxista y euclidiana son, respectivamente,

$$\mathcal{P}_T: |x - a| + |y - b| = \frac{|mx + ny + c|}{\max\{|m|, |n|\}}$$

$$\mathcal{P}_E: \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = \frac{|mx + ny + c|}{\sqrt{m^2 + n^2}}.$$

Mostramos las gráficas de las parábolas con $F = (-4, -1)$ y directriz $L: 2x + y = 0$, con ecuaciones

$$\mathcal{P}_T: |x + 4| + |y + 1| = \frac{|2x + y|}{2}$$

$$\mathcal{P}_E: \sqrt{(x + 4)^2 + (y + 1)^2} = \frac{|2x + y|}{\sqrt{5}}.$$

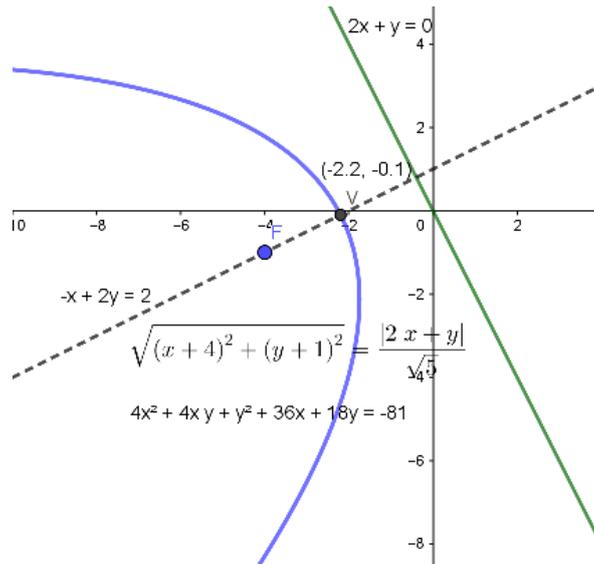


Figura 3, Parábola \mathcal{P}_E

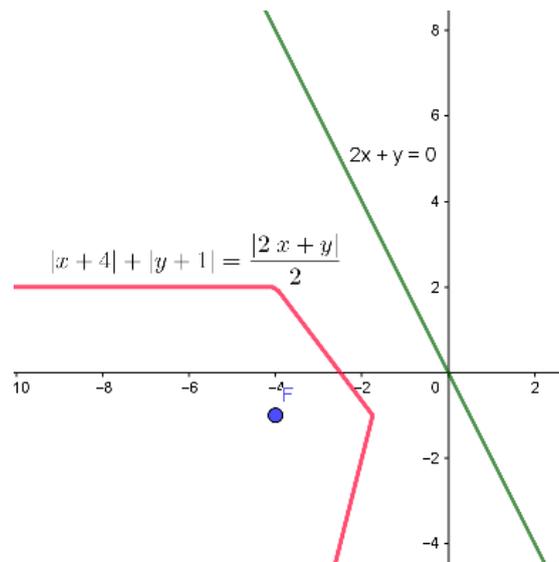


Figura 4, Parábola \mathcal{P}_T

Definición 4. Una elipse \mathcal{E} es el lugar geométrico de los puntos de un plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos llamados focos es igual a una constante mayor que la distancia entre los focos.

Dados los focos $F_1 = (a_1, b_1)$, $F_2 = (a_2, b_2)$ y constante $2a$, $a > 0$,

$$\mathcal{E} = \{P: d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\}.$$

Una elipse en la geometría del taxista es el conjunto de puntos

$$\mathcal{E}_T = \{P(x, y): |x - a_1| + |y - b_1| + |x - a_2| + |y - b_2| = 2a\}.$$

Y en la geometría euclidiana

$$\mathcal{E}_E = \left\{ P(x,y): \sqrt{(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2} + \sqrt{(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2} = 2a \right\}$$

donde $2a$ es la distancia entre los vértices.

La figura siguiente muestra una elipse con centro el origen, focos $F_1 = (-a_1, 0_1)$, $F_2 = (a_2, 0)$ y constante 6.

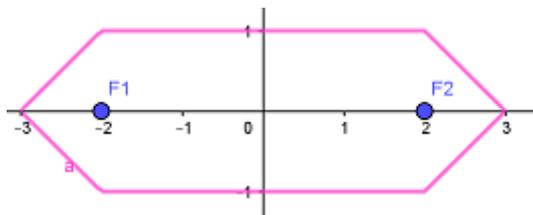


Figura 5. Gráfica de \mathcal{E}_T con centro $(0,0)$ y focos en el eje X.

Las ecuaciones de la elipse con focos los puntos fijos $F_1 = (2, 6)$, $F_2 = (4, 1)$ y $2a = 9$ en la geometría del taxista y euclidiana son

$$\mathcal{E}_T : |x - 2| + |y - 6| + |x - 4| + |y - 1| = 9$$

$$\mathcal{E}_E : \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 6)^2} + \sqrt{(x - 4)^2 + (y - 1)^2} = 9,$$

respectivamente. Sus gráficas se muestran en las Figuras 6 y 7.

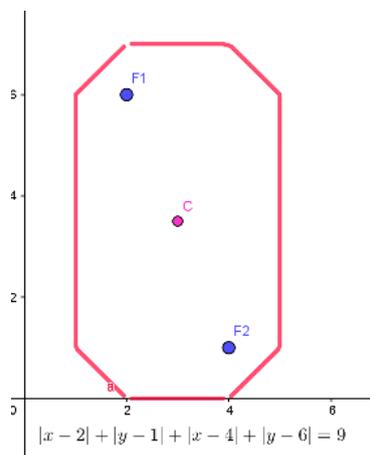


Figura 6. Gráfica de \mathcal{E}_T .

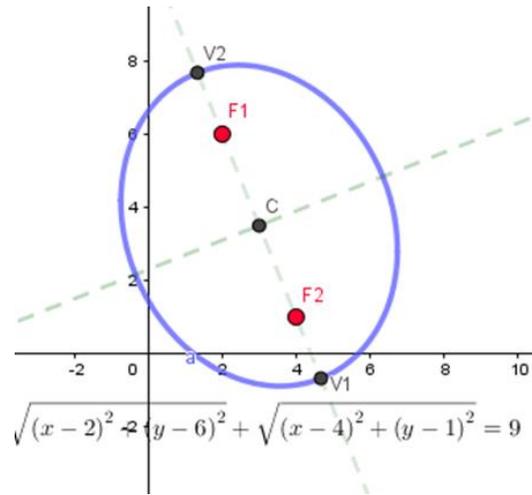


Figura7. Gráfica de \mathcal{E}_E .

Notamos que el área de \mathcal{E}_T es $26 u^2$. En \mathcal{E}_E , $a = \frac{9}{2}$, $c = \frac{\sqrt{29}}{4}$ y en consecuencia $b = \sqrt{13}$. El área de \mathcal{E}_E es $\frac{9\sqrt{13}}{2} u^2$.

Definición 5. Una hipérbola \mathcal{H} es el lugar geométrico de los puntos de un plano tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos llamados focos es una constante positiva. Si los focos son $F_1 = (a_1, b_1)$, $F_2 = (a_2, b_2)$ y la constante positiva es $2a$, entonces

$$\mathcal{H} = \{P: |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a\}.$$

Una hipérbola \mathcal{H}_T en la geometría del taxista es el conjunto de puntos

$$\mathcal{H}_T = \{P(x, y): |(|x - a_1| + |y - b_1|) - (|x - a_2| + |y - b_2|)| = 2a\}.$$

Y en la geometría euclidiana,

$$\mathcal{H}_E = \left\{P(x, y): \left| \sqrt{(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2} - \sqrt{(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2} \right| = 2a \right\}.$$

La distancia entre los vértices de \mathcal{H}_E es $2a$.

Por ejemplo, la ecuación de una hipérbola cuyos focos son los puntos $F_1 = (-2, 0)$, $F_2 = (2, 1)$ y constante 3 es

$$\mathcal{H}_T: ||x + 2| + |y| - |x - 2| - |y - 1|| = 3.$$

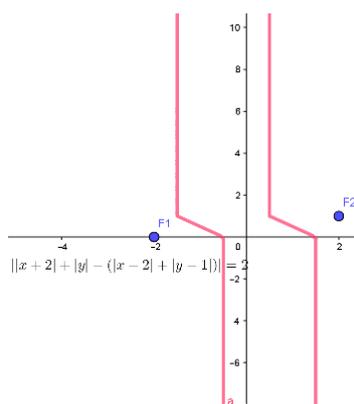


Figura 8. Gráfica de \mathcal{H}_T

Las ecuaciones de una hipérbola con focos $F_1 = (-2, 3)$, $F_2 = (1, 1)$ y constante 3 en la geometría del taxista y euclidiana, respectivamente, son:

$$\mathcal{H}_T: \left| |x + 2| + |y - 3| - |x - 1| - |y - 1| \right| = 3$$

$$\mathcal{H}_E: \left| \sqrt{(x + 2)^2 + (y - 3)^2} - \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 1)^2} \right| = 3.$$

Mostramos las gráficas correspondientes en las Figuras 9 y 10..

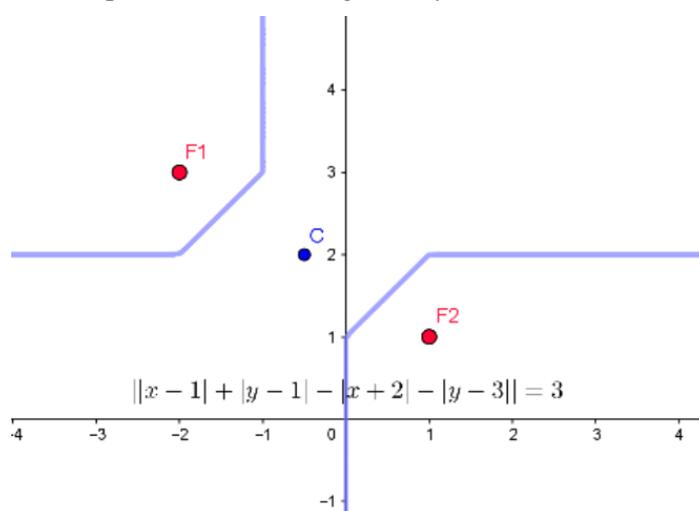


Figura 9. \mathcal{H}_T con focos $(-2, 3)$, $(1, 1)$.

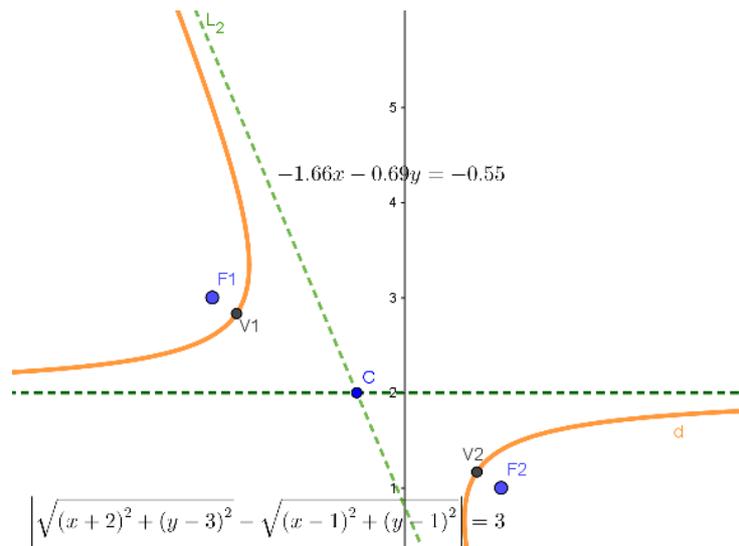


Figura 10. \mathcal{H}_E con focos $(-2, 3)$, $(1, 1)$

En la geometría euclidiana, la ecuación de la hipérbola es $12xy + 5y^2 - 24x - 14y + 17 = 0$ y las de sus asíntotas son $y = 2$ y $1.66x + 0.69y = 0.55$.

REFERENCIAS

Aroca, J. M., Fernández, M. J. & Ortiz, M. (2013). *Geometría*. España.

Lima, E., (1981). *Curso de Análise, Volume 2*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro. *Geometria do taxista*. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Disponible en: http://repositorio.roca.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/479/1/CM_ESPMAT_II_2012_07.pdf. Consultado el 20/04/2018.