

## Artículo de conferencia

IX CONGRESO INTERNACIONAL SOBRE ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS  
(IX CIEM-IREM PUCP, Huancavelica)

### El Modelo del Conocimiento y Competencias Didáctico-Matemáticas (CCDM) del profesor

### The Didactic-Mathematical Knowledge and Competencies Model (CCDM) of the Teacher

Luis Roberto Pino-Fan

Universidad de los Lagos, Chile

<http://orcid.org/0000-0003-4060-7408>

[luis.pino@ulagos.cl](mailto:luis.pino@ulagos.cl)

#### Información

Recibido: 18/05/2018.

Aceptado: 08/07/2018.

#### Palabras clave:

Didáctica, desempeño, competencia didáctico-matemáticas, enfoque onto-semiótico.

#### Information

#### Keywords:

Didactics, performance, didactic-mathematical competence, onto-semiotic approach.

#### Resumen

Uno de los problemas de investigación que cada vez cobra más interés en el campo de la Didáctica de las Matemáticas, es el de determinar y desarrollar cuáles son los conocimientos y las competencias clave para que los profesores de matemáticas se desempeñen idóneamente en su práctica profesional. A propósito, diversos autores han desarrollado estudios que han derivado en el planteamiento de modelos que tratan de describir los componentes del conocimiento del profesor de matemáticas. En esta Conferencia se presentan los recientes avances de la propuesta de un modelo del conocimiento y competencias didáctico-matemáticas (CCDM) del profesor, que se basa en supuestos teóricos del Enfoque Onto-Semiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos, y el cual viene desarrollándose desde el 2009 en diversos trabajos (Godino, 2009; Pino-Fan & Godino, 2015; Pino-Fan, Assis & Castro, 2015). Así mismo, se discutirán algunas aplicaciones del modelo en la formación inicial y continua de profesores.

#### Abstract

One of the research problems that is gaining more and more interest in the field of Didactics of Mathematics is to determine and develop which are the key knowledge and competencies for mathematics teachers to perform adequately in their professional practice. In this regard, several authors have developed studies that have led to the development of models that attempt to describe the components of mathematics teachers' knowledge. In this Conference, recent advances in the proposal of a model of the didactic-mathematical knowledge and competences (CCDM) of the teacher are presented, which is based on theoretical assumptions of the Onto-Semiotic Approach (EOS) of mathematical knowledge and instruction, and which has been developed since 2009 in several works (Godino, 2009; Pino-Fan & Godino, 2015; Pino-Fan, Assis & Castro, 2015). Likewise, some applications of the model in initial and continuing teacher training will be discussed.

## INTRODUCCIÓN

El estudio sobre los conocimientos y competencias didácticas y matemáticas que debe tener un profesor de matemáticas es un tema que ha sido ampliamente investigado, generándose así, diversas propuestas de modelos para caracterizarlos (por ejemplo, Shulman, 1987; Rowland, Huckstep y Thwaites, 2005, Hill, Ball y Schilling, 2008; Schoenfeld y Kilpatrick, 2008). Atendiendo a esta agenda de investigación, y con base en las nociones teóricas del Enfoque Onto-Semiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino, Batanero y Font, 2007) y sus diversos aportes al campo de la formación de profesores, se desarrolló un modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM). Este modelo, posteriormente dio lugar al modelo de Competencias y conocimientos Didáctico-Matemáticos (CCDM)

del profesor, toda vez que el modelo CDM, y sus respectivas herramientas teórico-metodológicas han sido utilizados en diversos estudios con el objetivo de caracterizar y desarrollar competencias clave en el profesor de matemáticas para que sus procesos de enseñanza sean los más idóneos posible.

En esta conferencia se presenta las características del modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas (CCDM), y sus recientes desarrollos, así como algunos ejemplos de su aplicación.

### Del modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) al modelo del Competencias y Conocimientos Didáctico-Matemáticos (CCDM)

En el marco del EOS (Godino, Batanero y Font, 2007) se ha desarrollado un modelo teórico de conocimientos del profesor de matemáticas denominado modelo CDM, el cual fue inicialmente introducido como un sistema de categorías de análisis (Godino, 2009), refinado y aplicado en diversas investigaciones (e.g., Pino-Fan, Assis y Castro, 2015; Pino-Fan y Godino, 2015; Pino-Fan, Godino y Font, 2016).

El modelo CDM (Figura 1) propone que los conocimientos didáctico-matemáticos de los profesores pueden organizarse o desarrollarse de acuerdo a tres grandes dimensiones: matemática, didáctica y meta didáctico-matemática. La dimensión matemática alude a los conocimientos que debe tener un profesor de las matemáticas escolares que enseña; la segunda dimensión alude a los conocimientos sobre aspectos involucrados en los procesos de enseñanza y aprendizaje de matemáticas (conocimiento profundo de las matemáticas escolares y su interacción con aspectos cognitivos y afectivos de los estudiantes, recursos y medios, interacciones en el aula y aspectos ecológicos). La tercera dimensión, dimensión meta didáctico-matemática, alude a los conocimientos que debe tener un profesor para poder sistematizar la reflexión sobre su práctica y así emitir juicios valorativos sobre su práctica o la de otros (Pino-Fan, Godino y Font, 2016; Breda, Pino-Fan y Font, 2017).

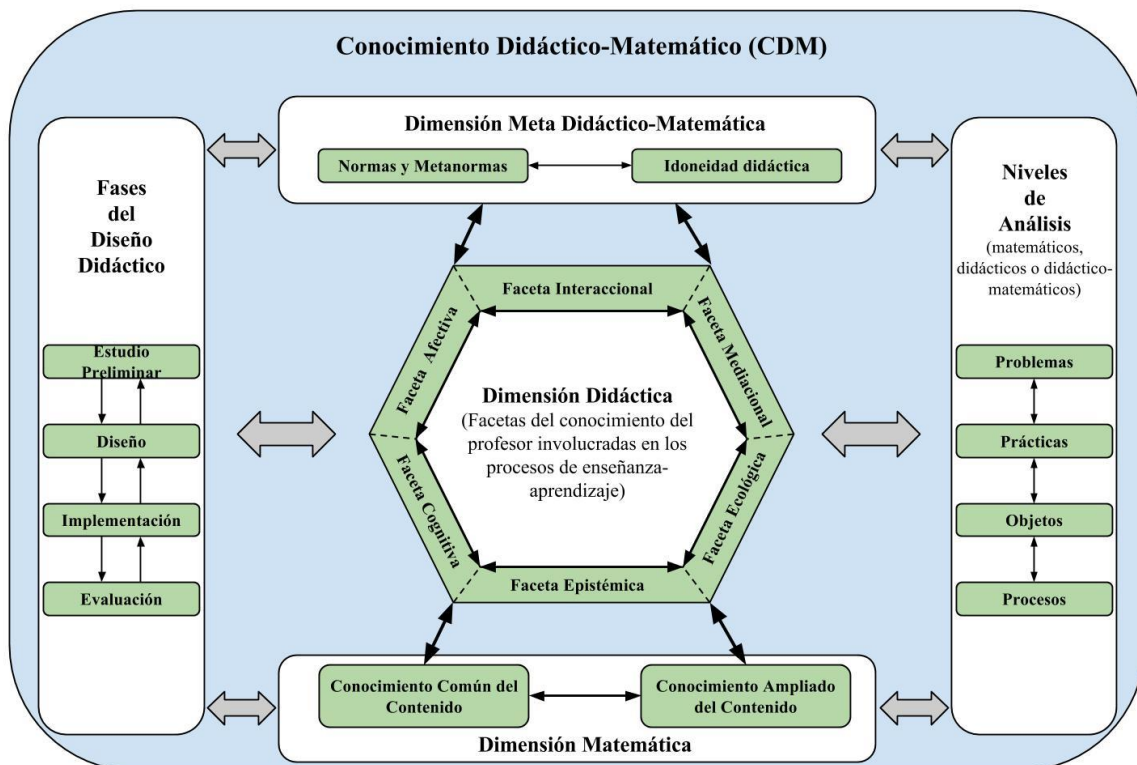


Figura 1. Modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (Pino-Fan y Godino, 2015, p. 103)

Al mismo tiempo, la *dimensión matemática* del CDM incluye dos subcategorías de conocimientos: *conocimiento común del contenido* y *conocimiento ampliado del contenido*. El conocimiento común del contenido es entendido como aquel conocimiento, sobre un objeto matemático concreto (por ejemplo,

la derivada), que se considera suficiente para resolver los problemas o tareas propuestas en el currículo de matemáticas (o planes de estudio) y en los libros de texto, de un nivel educativo determinado. Mientras que el conocimiento ampliado del contenido refiere a los conocimientos que debe tener el profesor sobre las nociones matemáticas que, tomando como referencia la noción matemática que se está estudiando en un momento puntual (por ejemplo, la derivada), están más adelante en el currículo del nivel educativo en cuestión, o en un nivel siguiente (por ejemplo, la integral en bachillerato, o el teorema fundamental del cálculo y ecuaciones diferenciales en universidad).

Es claro que la dimensión matemática del CDM, que posibilita al profesor resolver problemas y tareas matemáticas, no es suficiente para la práctica de enseñanza. Los autores de los diversos modelos descritos en la segunda sección, coinciden en que además del contenido matemático, el profesor debe tener conocimiento sobre los diversos factores que influyen cuando se planifica e implementa la enseñanza de dicho contenido matemático. En este sentido, la dimensión didáctica del CDM incluye las siguientes subcategorías (o facetas) del conocimiento:

- a) *Faceta epistémica* (conocimiento especializado de la dimensión matemática), la cual incluye conocimientos que permite al profesor movilizar diversas representaciones de un objeto matemático, resolver la tarea mediante distintos procedimientos, vincular el objeto matemático con otros objetos matemáticos del nivel educativo en el que se enseña o de niveles anteriores y posteriores, comprender y movilizar la diversidad de significados parciales para un mismo objeto matemático (que integran el significado holístico para dicho objeto), proporcionar diversas justificaciones y argumentaciones, e identificar los conocimientos puestos en juego durante la resolución de una tarea matemática.
- b) *Faceta cognitiva* (conocimiento sobre los aspectos cognitivos de los estudiantes), la cual refiere al conocimiento necesario para “reflexionar y evaluar” la proximidad o grado de ajuste de los significados personales (conocimientos de los estudiantes) respecto de los significados institucionales (conocimiento desde el punto de vista del centro educativo).
- c) *Faceta afectiva*, la cual versa sobre los conocimientos que son necesarios para comprender y tratar los estados de ánimo de los estudiantes, los aspectos que los motivan o no a resolver un problema determinado, etc. Se trata de conocimientos que ayudan a describir las experiencias y sensaciones de los estudiantes dentro de una clase concreta o con un problema matemático determinado, en un nivel educativo específico
- d) *Faceta interaccional*, la cual involucra los conocimientos necesarios para prever, implementar y evaluar secuencias de interacciones, entre los agentes que participan en el proceso de enseñanza y aprendizaje, orientadas a la fijación y negociación de significados (aprendizajes) de los estudiantes.
- e) *Faceta mediacional*, refiere a los conocimientos que debería tener un profesor para usar y evaluar la pertinencia del uso de materiales y recursos tecnológicos para potenciar el aprendizaje de un objeto matemático específico, así como la asignación del tiempo a las distintas acciones y procesos de aprendizaje.
- f) *Faceta ecológica*, que refiere a conocimientos sobre el currículo de matemáticas del nivel educativo en el que se contempla el estudio del objeto matemático, sus relaciones con otros currículos, y las relaciones que dicho currículo tiene con los aspectos sociales, políticos y económicos, que soportan y condicionan el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Un aspecto que hay que destacar aquí, es que los componentes de esta dimensión didáctica son de una naturaleza didáctico-matemática, puesto que los conocimientos de los profesores sobre aspectos cognitivos y afectivos de los estudiantes, las interacciones y los recursos, etc., siempre van estrechamente vinculados a las matemáticas que son objeto de enseñanza-aprendizaje.

Por otra parte, es importante señalar que, para cada una de las dimensiones y subdimensiones (o facetas) del CDM, el modelo también propone “herramientas analíticas” que permiten operativizar cada una de tales categorías (tanto para la caracterización como para el desarrollo de las mismas). Tales

“herramientas” teórico-metodológicas son tomadas de los aportes del Enfoque Onto-Semiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción Matemáticas.

Una de las perspectivas de desarrollo del modelo CDM, es el encaje de la noción de conocimiento con la noción de competencia del profesor. Esto en tanto que en diversos estudios se dejó de manifiesto que las tres dimensiones (con las seis facetas que componen la dimensión didáctica del conocimiento didáctico-matemático), pueden contemplarse para analizar, describir y desarrollar el conocimiento de los profesores –o futuros profesores– involucrado en las diversas fases de los procesos de enseñanza y aprendizaje de tópicos concretos de matemáticas: estudio preliminar, planificación o diseño, implementación y evaluación. Además, como parte de sus conocimientos didáctico-matemáticos, los profesores deben conocer y comprender los aspectos involucrados en cada una de dichas fases del diseño didáctico. Por otra parte, en el marco del EOS también se han realizado diversas investigaciones sobre las competencias del profesor de matemáticas (e.g., Rubio, 2012; Font, Breda & Sala, 2015), las cuales han puesto de manifiesto la necesidad de contar con un modelo de conocimientos del profesor para poder evaluar y desarrollar competencias clave para su actividad docente.

Estas dos agendas de investigación han confluído en diversos estudios, en los cuales se ha presentado el CDM como una ‘herramienta teórico-metodológica’ que permite caracterizar, y posteriormente desarrollar, competencias claves para la práctica del profesor de matemáticas. Por tanto, fue natural pensar en la ampliación del modelo CDM sobre conocimientos del profesor, a un modelo sobre *conocimientos y competencias didáctico-matemáticas* del profesorado (modelo CCDM).

Se espera que el profesor de matemáticas esté capacitado para abordar problemas didácticos básicos en la enseñanza de esta materia mediante la aplicación de unas herramientas teóricas y metodológicas, dando lugar, por tanto, a una serie de competencias específicas. Aparecen así dos cuestiones clave para desarrollar el modelo CCDM: 1) ¿cómo se entiende la noción de competencia? y ¿cuáles son las competencias clave que debe tener el profesor de matemáticas? Según Weinert (2001), los enfoques por competencias pueden clasificarse en tres grupos: a) Enfoque cognitivo, b) Enfoque motivacional y c) Enfoque integral o de acción competente. De acuerdo a esta clasificación, la competencia en el modelo CCDM se entiende desde la perspectiva de la acción competente, considerándola como el conjunto de conocimientos, disposiciones, etc., que permite el desempeño eficaz en los contextos propios de la profesión de las acciones citadas en su formulación. Dicho en términos aristotélicos, se trata de una potencialidad que se actualiza en el desempeño de acciones eficaces (competentes).

Esta formulación del término de competencia se debe desarrollar para ser operativa, y para ello hay que realizar una caracterización (definición, niveles de desarrollo y descriptores) que permita su desarrollo y evaluación. De acuerdo con Seckel y Font (2015), consideramos que el punto de partida para el desarrollo y evaluación de una competencia profesional debe ser una tarea que produce la percepción de un problema profesional que se quiere resolver, para lo cual el futuro profesor o el profesor en servicio debe movilizar habilidades, conocimientos y actitudes, para realizar una práctica que intente dar solución al problema. Además, podemos esperar que dicha práctica se realice con más o menos éxito (logro) y, a su vez, dicho logro se puede considerar una evidencia de que la persona puede realizar prácticas similares a las que están descritas por alguno de los descriptores de la competencia, el cual se suele asociar a un determinado nivel de competencia.

Así, en el modelo CCDM se considera que las dos competencias clave del profesor de matemáticas son la *competencia matemática* y la *competencia de análisis e intervención didáctica*, cuyo núcleo consiste en: “Diseñar, aplicar y valorar secuencias de aprendizaje propias, y de otros, mediante técnicas de análisis didáctico y criterios de calidad, para establecer ciclos de planificación, implementación, valoración y plantear propuestas de mejora” (Breda, Pino-Fan y Font, 2017, p. 1897). Para desarrollar esta competencia el profesor necesita, por una parte, conocimientos que le permitan describir y explicar lo que ha sucedido en el proceso de enseñanza y aprendizaje y, por otra, necesita conocimientos para valorar lo que ha sucedido y hacer propuestas de mejora para futuras implementaciones. Esta competencia general de análisis e intervención didáctica del profesor de matemáticas, está formada por diferentes subcompetencias (Breda, Pino-Fan & Font, 2017; Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017): 1) subcompetencia de análisis de la actividad matemática; 2) subcompetencia de análisis y gestión de la interacción y de su efecto sobre el aprendizaje de los estudiantes; 3) subcompetencia de

análisis de normas y metanormas; y 4) subcompetencia de valoración de la idoneidad didáctica de procesos de instrucción.

## Aplicaciones y desarrollos del modelo CCDM

El modelo CCDM se ha generado como una propuesta teórica que se ha ido confrontando con la práctica para su desarrollo y refinamiento. En Breda, Pino-Fan y Font (2017) se explican una serie de experimentos de diseño, estudio de caso y cursos de formación, que han permitido, por una parte, el desarrollo del modelo Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas (modelo CCDM) del profesor de matemáticas y, por otra parte, ponerlo a prueba para su refinamiento y mejora. También se observaron las siguientes regularidades:

1. Los profesores o futuros profesores, cuando han de opinar (sin una pauta previamente dada) sobre un episodio de aula implementado por otro profesor, expresan comentarios en los que se pueden hallar aspectos de descripción y/o explicación y/o valoración.
2. Las opiniones de estos profesores se pueden considerar evidencias de algunas de las seis facetas (epistémica, cognitiva, ecológica, interaccional, mediacional y emocional) del modelo del conocimiento didáctico-matemático (CMD) del profesor de matemáticas (una parte del CCDM).
3. Cuando las opiniones son claramente valorativas, se organizan de manera implícita o explícita mediante algunos indicadores de los componentes de los criterios de idoneidad didáctica (otro componente del modelo CCDM) propuestos por el EOS (idoneidad epistémica, mediacional, ecológica, emocional, interaccional y cognitiva).
4. La valoración positiva de estos indicadores se basa en la suposición implícita o explícita de que hay determinadas tendencias sobre la enseñanza de las matemáticas que nos indican cómo debe ser una enseñanza de las matemáticas de calidad (Breda, Font y Pino-Fan, 2018). Estas tendencias se relacionan con el modelo CCDM ya que algunas de ellas son la base para proponer algunos de los criterios de idoneidad didáctica.
5. Los niveles de profundidad del análisis realizado por los profesores varían desde análisis superficiales a expertos, en función de las herramientas teóricas usadas para realizarlos.

Las regularidades que se acaban de describir, sirven para determinar una gradación en las categorías de conocimientos y competencias del modelo CCDM, distinguiendo diferentes niveles e incluyendo en el primer nivel cinco supra categorías: 1) tipo de análisis; 2) fase del proceso de estudio; 3) dimensión del conocimiento; 4) profundidad del análisis; y 5) competencias. Estas cinco supra categorías, se descomponen a su vez en sub-categorías de distintos niveles, las cuales a su vez si es necesario se descomponen en otras sub-categorías. Por ejemplo, la primera supra categoría, *tipo de análisis*, con tres valores o categorías de segundo nivel (descriptivo, explicativo y valorativo), ha sido sugerida por las regularidades observadas en los estudios empíricos comentados anteriormente.

Dichas regularidades también han sugerido la supra categoría *profundidad del análisis*, con cuatro valores o categorías de segundo nivel:

- N0: Narrativa superficial. Por ejemplo, si se trata de describir un episodio de aula, el lector no se hace una idea de lo que pasó en el episodio.
- N1: Narrativa que capta los elementos esenciales. El lector se hace una idea de lo que pasó en el episodio.
- N2: Análisis detallado de aspectos de la narrativa siguiendo un modelo de análisis. Por ejemplo, si se hace una descripción de la actividad matemática, se identifican algunas prácticas, objetos primarios y procesos.
- N3: Análisis experto de la narrativa de acuerdo con un modelo. Por ejemplo, se hace una descripción pormenorizada de la actividad matemática, se identifican exhaustivamente las prácticas, los objetos primarios y los procesos matemáticos.

Es preciso señalar que el tema de los niveles de competencias que acabos de comentar, es uno de los refinamientos en curso en el grupo de investigación sobre el EOS y CCDM.

Otros desarrollos recientes están relacionados con la tercera dimensión del CDM, la dimensión meta didáctico-matemática, pues se han realizado estudios que han derivado en una propuesta de desarrollo del *teacher noticing* (Castro, Pino-Fan y Velásquez-Echavarría, 2018), a partir de las herramientas teórico metodológicas que operativizan la dimensión “meta” del CDM, y que ha permitido configurar una Guía de Reflexión Didáctica. Los resultados del estudio de Castro et al. (2017) indican que la Guía de Reflexión Didáctica puede ayudar a desarrollar sensibilidad del profesor para identificar y cuestionar diversos elementos didácticos involucrados en la tarea de la enseñanza de las matemáticas.

## Reflexiones Finales

En este trabajo se ha presentado un modelo teórico, el modelo Competencias y Conocimientos Didáctico – Matemáticos (modelo CCDM) del profesor de matemáticas, el cual está basado en una serie de investigaciones empíricas que, por una parte, han permitido su desarrollo y refinamiento y, por otra parte, han puesto a prueba sus constructos teóricos. Aunque el planteamiento que se ha hecho aquí es básicamente teórico, hay que resaltar que se vienen realizando numerosas investigaciones empíricas sobre los diversos componentes del modelo, como se puede ver en el apartado de “formación de profesores” de la web <http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/> o en la web <http://www.lrpino-fan.com/p/produccion.html>.

El modelo CCDM abre, en consecuencia, un potente programa de investigación y desarrollo, focalizado en el diseño, experimentación y evaluación de intervenciones formativas que promuevan el desarrollo profesional del profesor de matemáticas, teniendo en cuenta las distintas categorías de conocimientos y competencias didácticas descritas en este trabajo.

## AGRADECIMIENTOS

Trabajo realizado en el marco de los proyectos de investigación FONDECYT N°11150014 (CONICYT-Chile) y EDU2015-64646-P (MINECO/FEDER, UE).

## REFERENCIAS

- Breda, A., Font, V., & Pino-Fan, L. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. *Bolema*, 32(60), 255-278. doi: <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13>
- Breda, A., Pino-Fan, L., & Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 13(6), 1893-1918. doi: 10.12973/eurasia.2017.01207a
- Castro, W. F., Pino-Fan, L., & Velásquez-Echavarría, H. (2018). A proposal to enhance preservice teacher's noticing. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 14(9). doi: <https://doi.org/10.29333/ejmste/92017>
- Font, V., Breda, A., & Sala, G. (2015). Competências profissionais na formação inicial de professores de matemática. *Praxis Educacional*, 11(19), 17-34.
- Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13 – 31.
- Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, 39(1), 127 – 135. doi: 10.1007/s11858-006-0004-1
- Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., & Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema*, 31(57), 90-113.
- Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39, 372–400.

- Pino-Fan, L., Assis, A., & Castro, W. F. (2015). Towards a methodology for the characterization of teachers' didactic-mathematical knowledge. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 11(6), 1429-1456. doi: 10.12973/eurasia.2015.1403a
- Pino-Fan, L., & Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *PARADIGMA*, 36(1), 87-109.
- Pino-Fan, L., Godino, J. D., & Font, V. (2016). Assessing key epistemic features of didactic-mathematical knowledge of prospective teachers: the case of the derivative. *Journal of Mathematics Teacher Education*. doi:10.1007/s10857-016-9349-8
- Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8(3), 255-281.
- Rubio, N. (2012). *Competencia del profesorado en el análisis didáctico de prácticas, objetos y procesos matemáticos*. (Doctoral dissertation). Retrieved from <http://www.tdx.cat/handle/10803/294031>
- Seckel, M. J., & Font, V. (2015). Competencia de reflexión en la formación inicial de profesores de matemática en Chile. *Praxis Educativa*, 11(19), 55-75.
- Schoenfeld, A., & Kilpatrick, J. (2008). Towards a theory of proficiency in teaching mathematics. En D. Tirosh, & T. L. Wood (Eds.), *Tools and processes in mathematics teacher education* (pp. 321-354) Rotterdam: Sense Publishers.
- Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.
- Weinert, F. (2001). Concept of competence: A conceptual clarification. In D. Rychen & L. Salganik (Eds.), *Definition and selection key competencies* (pp. 45-65). Gottingen: Hogrefe & Huber.